Теория дифракции

Лекции 1 – 2. Введение

П. А. Макаров





15 и 29 сентября 2026 г.

Содержание

1. Знакомство и основные сведения
2. Литература
3. Теория дифракции в системе наук и в учебном плане
4. Общее представление о предмете
5. О волновых процессах
6. Волновое уравнение
7. Контрольные вопросы и задания
8. Источники

Знакомство и основные сведения

- Дисциплина: Теория дифракции;
- Преподаватель: Макаров Павел Андреевич, makarovpa@ipm.komisc.ru, @mkrvpa;
- Трудоёмкость: 16 ч. лекций + 32 ч. лаб. раб;
- Форма итоговой аттестации: экзамен;
- Web-страница курса: https://www.makarovpa.ru/diffraction.

Экзамен

Итоговый балл

$$S = \sum_{i=1}^{8} L_i + E, \tag{1}$$

где балл за каждую лабораторную работу $L_i \leqslant \dfrac{70}{8} = 8.75$, а $E \leqslant 30$ — промежуточный контроль на экзамене. Работа на экзамене может быть заменена выполнением экзаменационного проекта и сдачей отчёта по нему: $E \leftrightarrow P$.

Итоговый балл, S	< 60	$60 \div 69$	$70 \div 89$	$90 \div 100$
Оценка	2	3	4	5

Таблица 1: Перевод баллов в оценки экзамена

Какие инструменты потребуются для лабораторных работ?

- Текстовый редактор.
- Интерпретатор Python.
- Дополнительные библиотеки: SciPy, NumPy, SymPy, MatPlotLib.
- Дистрибутив LaTeX.

Удобное решение

JupyterLab + TeXLive.

Возможные облачные сервисы

JupyterLite / Google Colab / Kaggle
+
Overleaf / Papeeria / TeXPage.

Литература

Основная

1. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн.

2. *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику.

3. *Зоммерфельд А.* Оптика.

4. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики.

5. *Ландсберг Г. С.* Оптика.

Литература

Дополнительная

1. *Комеч А. И.* Практическое решение уравнений математической физики.
2. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.
5. *Гальцов Д. В.* Теоретическая физика для студентов-математиков.
6. *Карлов Н. В., Кириченко Н. А.* Колебания, волны, структуры.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. II. Теория поля.
8. *Бредов М. М, Румянцев В. В, Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика.
9. *Гольдштейн Л. Д, Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны.
10. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн.
11. *Кугушев А. М., Голубева Н. С., Митрохин В. Н.* Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн.

Литература

Специальная

1. *Шанин А. В.* Введение в теорию дифракции. Конспект лекций.
2. *Meyer C. F.* The Diffraction of light, X-rays, and material particles.
3. *Фок В. А.* Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн.
4. *Менцер Дж. Р.* Диффракция и рассеяние радиоволн.
5. *Асланов Л. А., Треушников Е. Н.* Основы теории дифракции рентгеновских лучей.
6. *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики.
7. *Осетров А. В.* Интегральные уравнения в теории дифракции акустических волн.

Теория дифракции в системе наук и в учебном плане

Что такое теория дифракции?

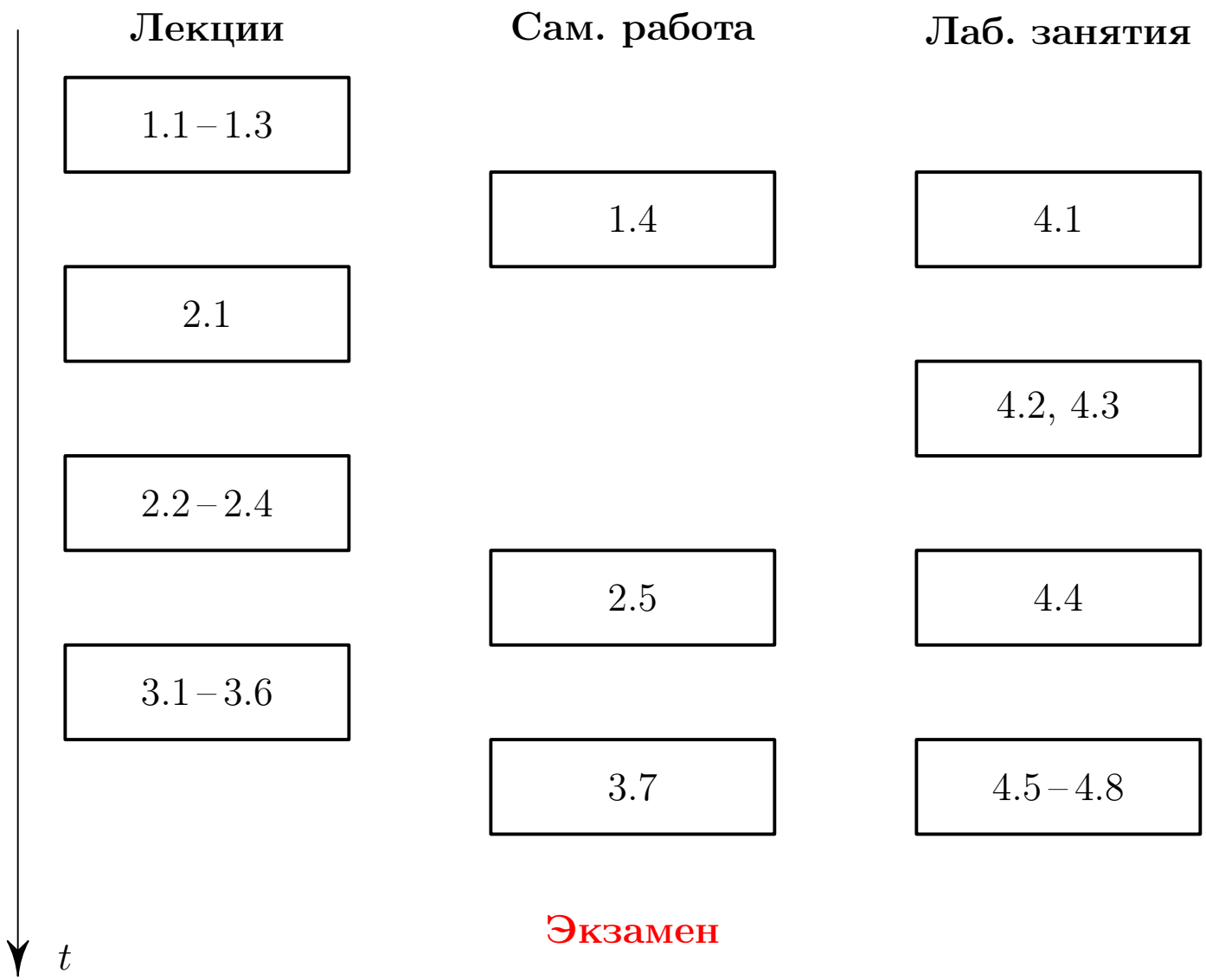
Теория дифракции в системе наук и в учебном плане



Рис. 1: Место теории дифракции в системе наук

Теория дифракции в системе наук и в учебном плане

Рекомендуемый порядок освоения материала



Теория дифракции в системе наук и в учебном плане

Дифракционные исследования в СыктГУ





Рис. 2: Слева направо: Бабушкин Ф.А., Пунегов В.И., Беляев Ю.Н.

Общее представление о предмете

Пример задач, приводящих к дифракционным эффектам

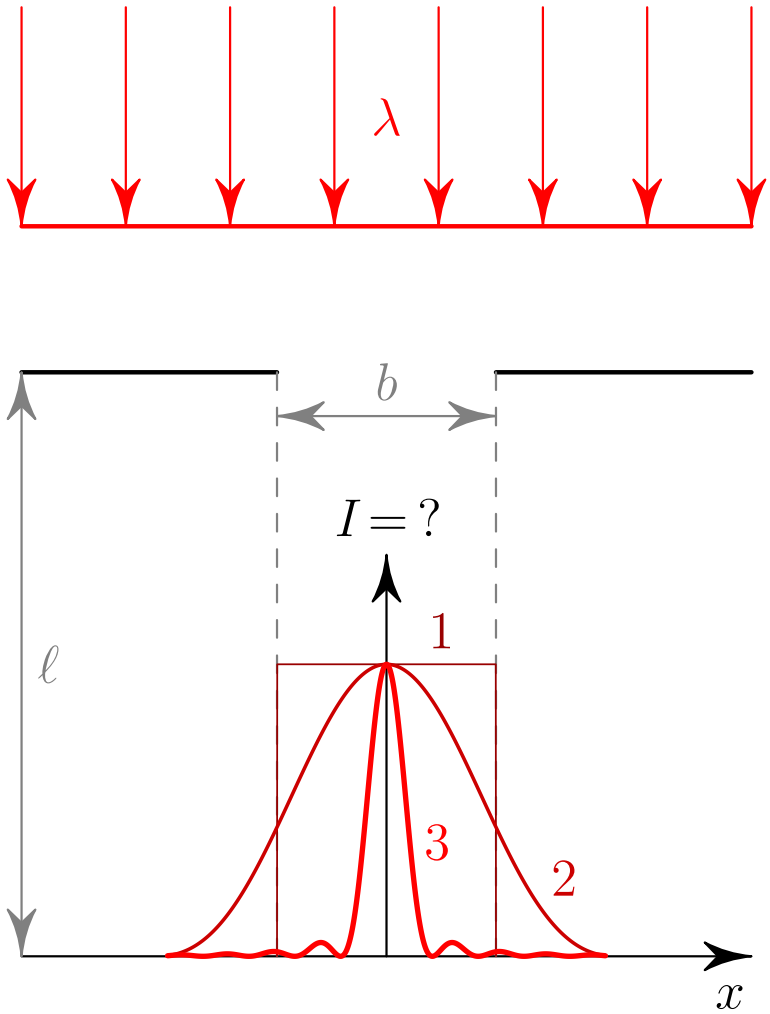
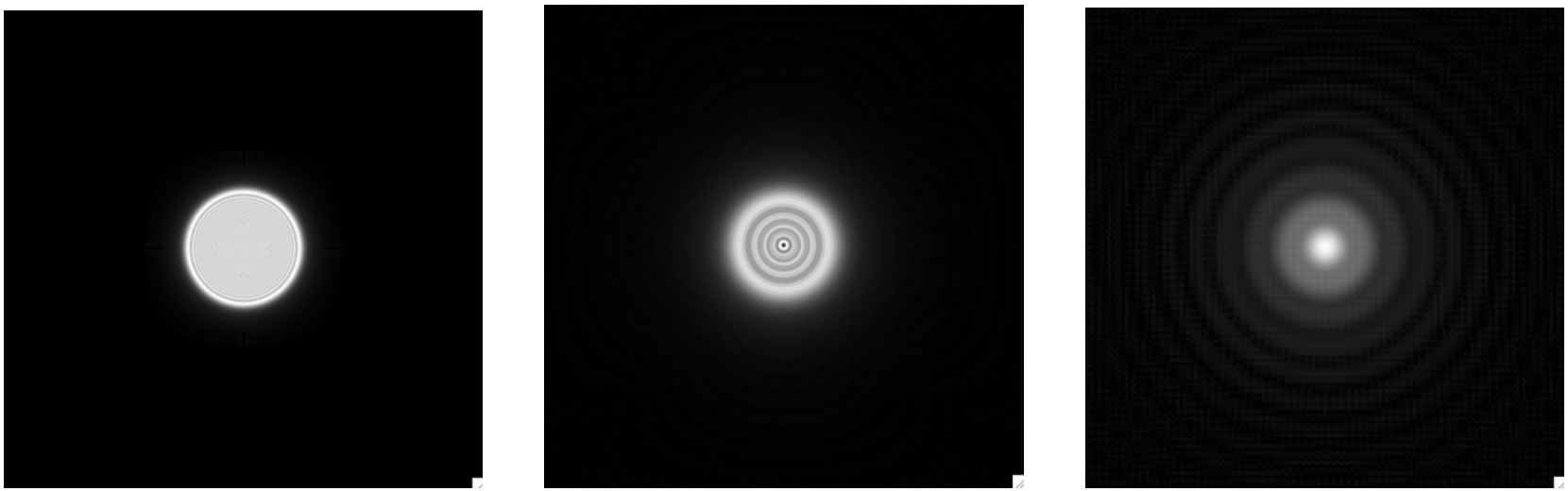


Рис. 3: Падение плоской волны с длиной волны λ на непрозрачный материал, в котором имеется щель ширины b

Число Френеля

$$F = \frac{b^2}{\ell\lambda} \tag{2}$$



$F = 10^2$ $F = 1$ $F = 10^{-2}$

Рис. 4: Результаты наблюдения дифракции по схеме рис. 3 при различных значениях F (изображение с сайта Wikipedia [1])

1. Случай $F \gg 1$ отвечает приближению *геометрической оптики.* При этом на экране получается равномерно освещённое изображение щели.
2. Ситуация, в которой $F \sim 1$, называется *дифракцией Френеля*. Наблюдение ведётся вблизи от препятствия, т. е. в непараллельных лучах, на экране при этом получается изображение щели, обрамлённое по краям отчётливо различимыми светлыми и тёмными полосами.
3. И наконец, *дифракция Фраунгофера* (дифракция в параллельных лучах) имеет место при $F \ll 1$.

Определение 1

Дифракция *— это любое отклонение света от прямолинейного хода лучей, которое нельзя объяснить отражением или преломлением.*

Замечание 1

Дифракция — это широко встречающееся явление, происходящее не только в условиях рис. 3 и 4. Так, дифракция имеет место не только для плоских, но и для волн иного типа, в частности — сферических и др.

Определение 2

Задачей теории дифракции *является определение волнового возмущения, распространяющегося от препятствия, то есть определение амплитуды и фазы, а в случае векторных (например, электромагнитных) волн — и поляризации, всюду в области, лежащей за препятствием.*

Определение 3

Общая задача теории дифракции электромагнитных волн *заключается в нахождении решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего определённым начальным и предельным условиям. Начальные условия могут быть заменены условиями периодичности во времени. Кроме предельных условий, которые должны выполняться на поверхностях раздела различных сред, должны быть заданы особенности (источники поля) и условия на бесконечности.*

Прямая и обратная задачи дифракции

- Целью прямой задачи является определение характеристик дифрагированного поля по известным параметрам объекта, на котором происходит дифракция (все условия наблюдения, включая свойства источника волны, также предполагаются известными).
- Суть обратной задачи состоит в получении информации об объекте, посредством анализа полученной на нём дифракционной картины в заданных условиях.

Дифракция и рассеяние

- Рентгеновского излучения;
- Радиоволн;
- Акустических волн в жидкостях и твёрдых телах;
- Света на звуке;
- Электронов, нейтронов и даже молекул фуллерена на тех или иных объектах (вплоть до дифракции атомных частиц на стоячих электромагнитных волнах).

Замечание 2

*Понятия **дифракция** и **дифракционное излучение** обозначают хоть и родственные, но всё же различные физические явления [2].*

Общее представление о предмете

Дифракция молекул C_{60}

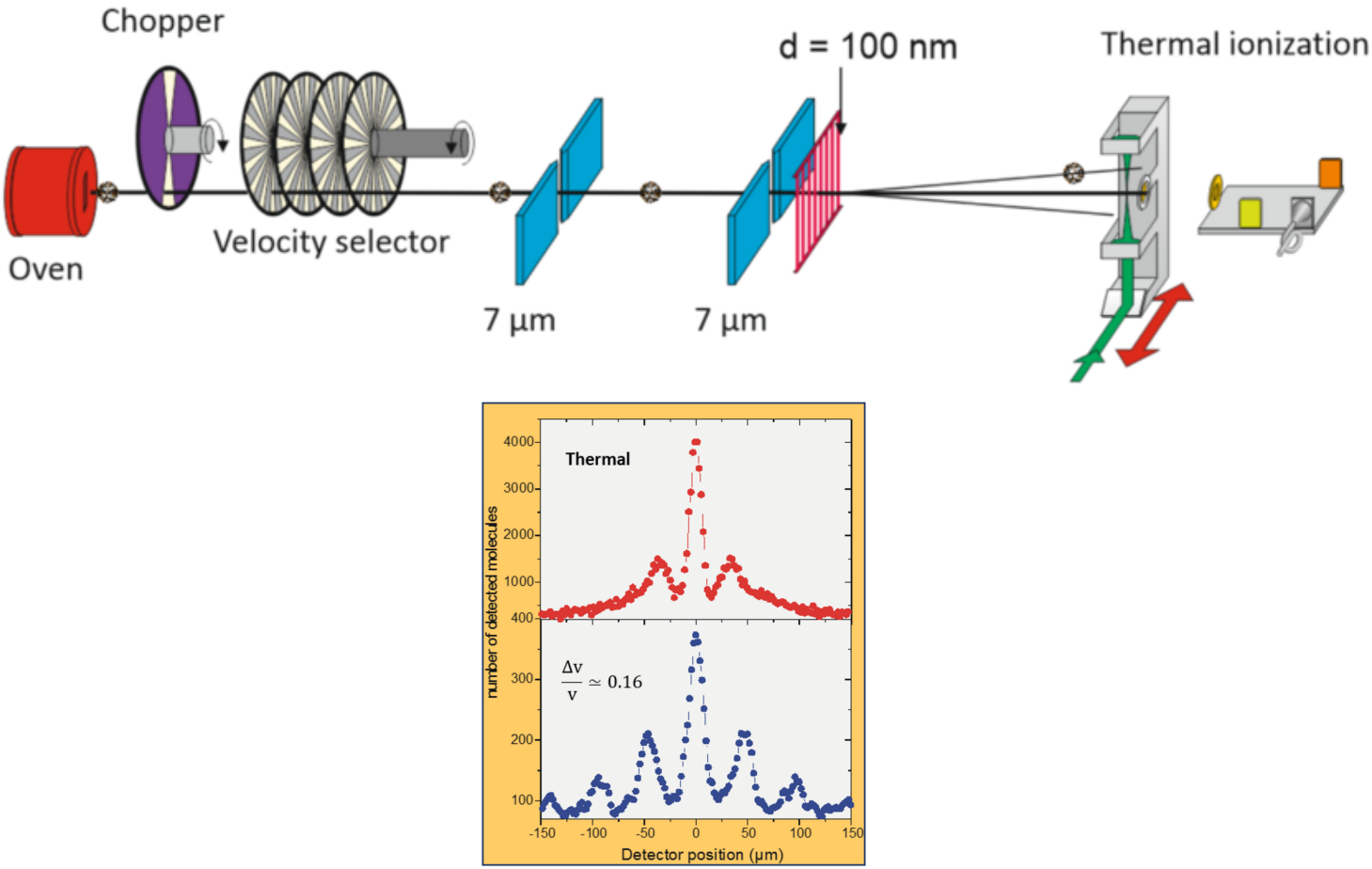


Рис. 5: Экспериментальная установка и результаты наблюдения дифракции молекул фуллерена C_{60} (quantum soccer ball) [3]

Общее представление о предмете

Тень, формируемая светом, и нелинейная оптика

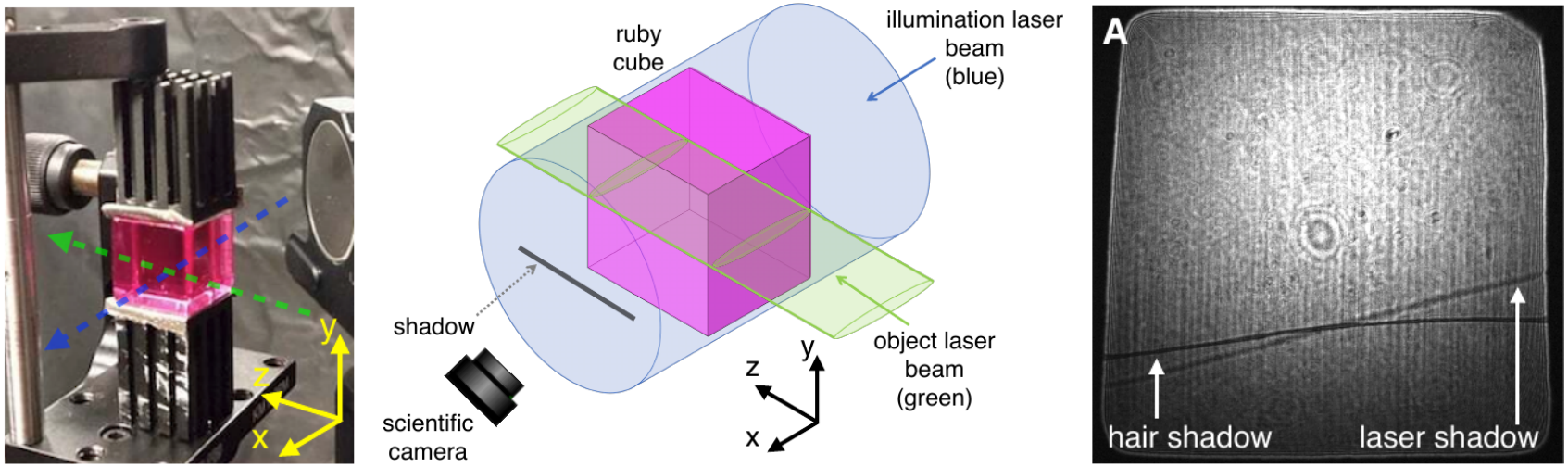


Рис. 6: Экспериментальная установка, её принципиальная схема и результаты наблюдений, приведённые в работе [4]

Общее представление о предмете

Использование дифракции в оптических процессорах

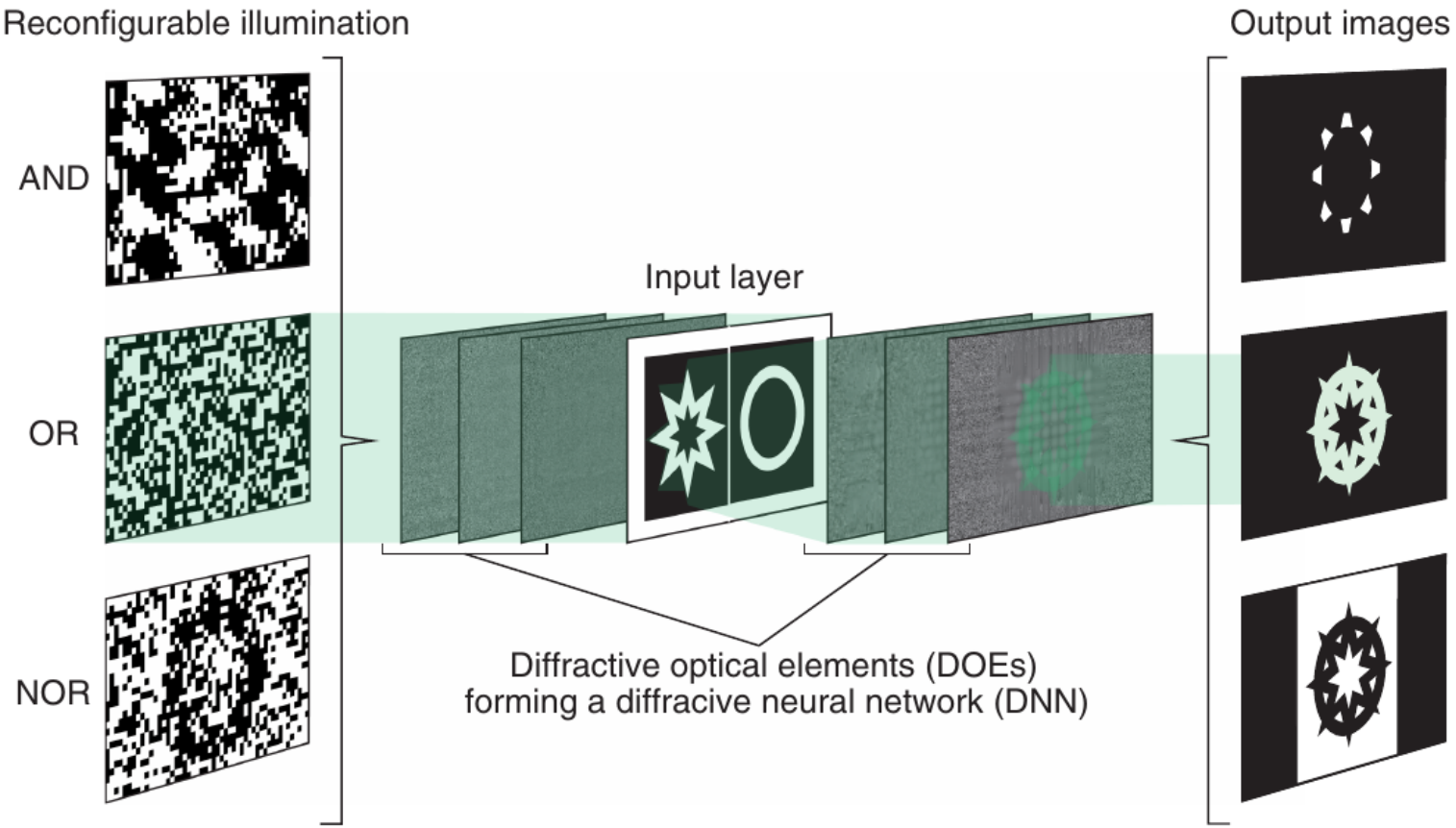


Рис. 7: Схема Diffraction Casting, предложенная в работе [5]

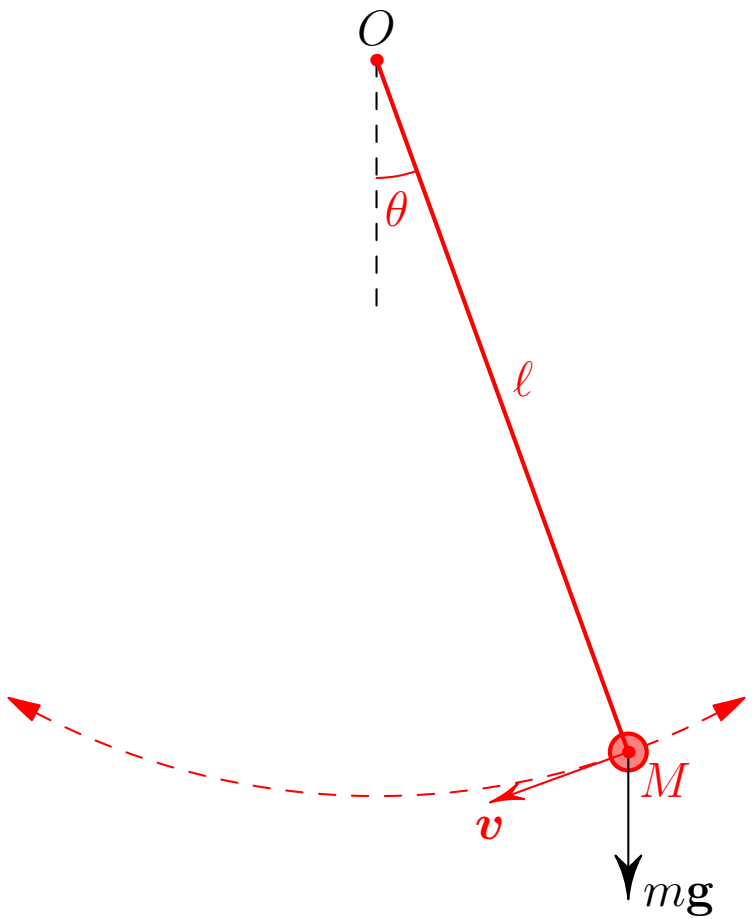


Рис. 8: Простейший пример колебательной системы — плоский математический маятник

Определение 4

Колебаниями *называют ограниченные (и чаще всего повторяющиеся) движения в окрестности некоторого среднего положения (например, устойчивого положения равновесия).*

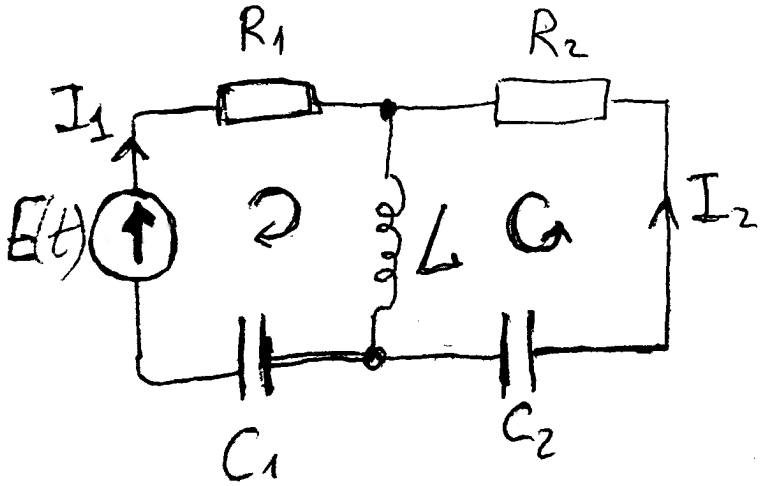


Рис. 9: Пример колебательной системы с двумя степенями свободы — два связанных электрических колебательных контура с общей катушкой индуктивности

Определение 5

Волна *— это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью.*

Утверждение 1 (Условие квазистационарности)

Если характерные размеры системы $L < vT$, где v — это скорость распространения возмущения, а T — время его заметного изменения, то о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами. В случае $L > vT$ процесс нужно считать волновым, а саму систему — распределённой.

О волновых процессах

Примеры волн различной природы — волны в жидкости или газе

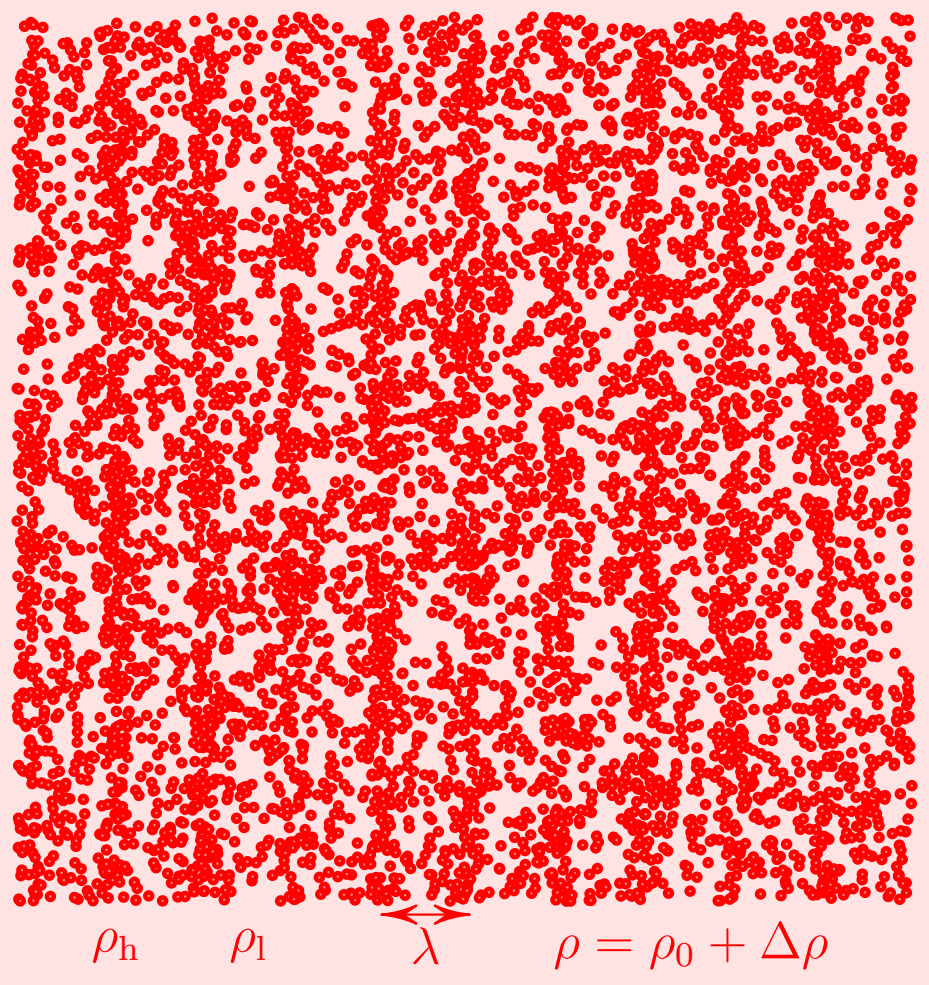


Рис. 10: Модельное представление распространения плоской акустической волны в газе

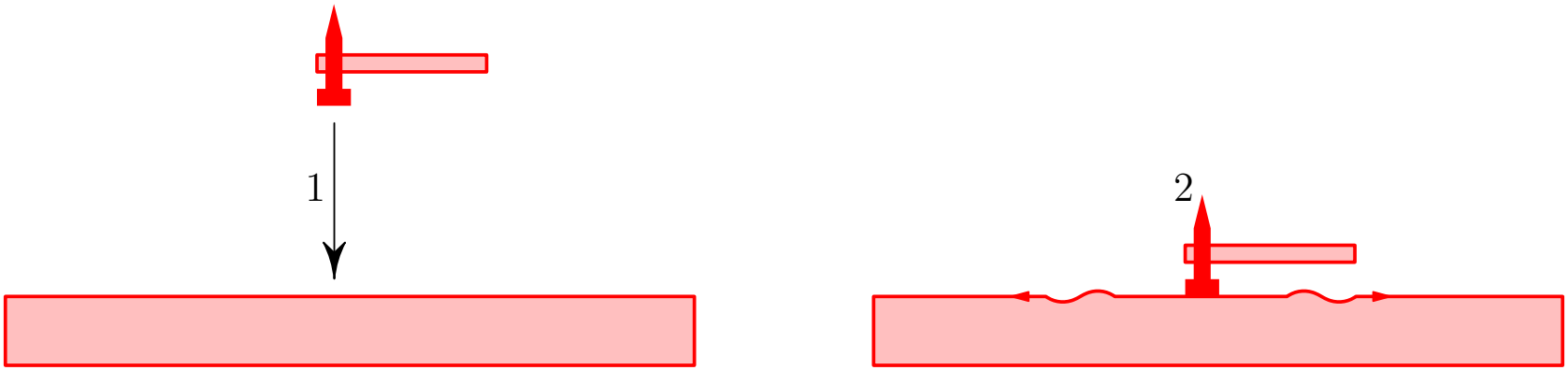


Рис. 11: Модельное представление возбуждения и распространения упругих волн в твёрдых телах

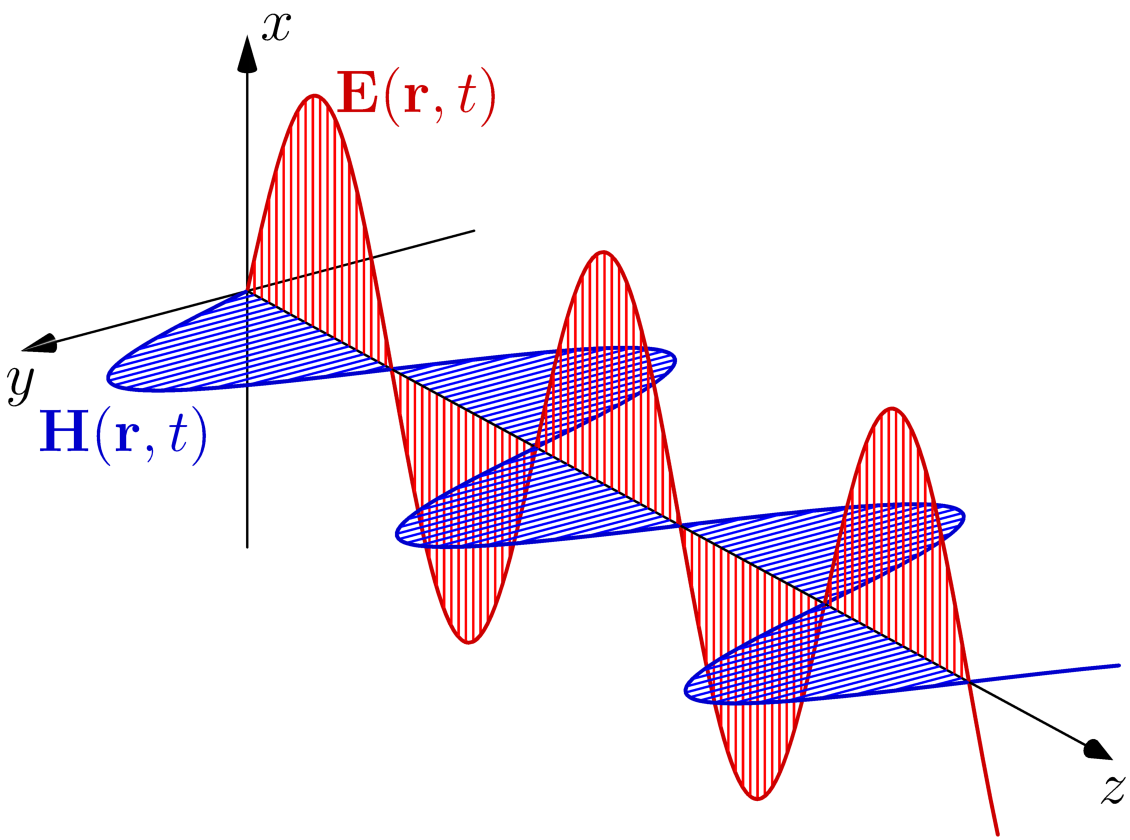


Рис. 12: Конфигурация поля плоской монохроматической линейно-поляризованной электромагнитной волны

Уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0. \tag{3}$$

Уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0. \tag{3}$$

Волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа. Имеет фундаментальное значение в теории волн. Δ — оператор Лапласа, v — константа, характеризующая свойства среды. Уравнение (4) допускает решение в виде распространяющихся возмущений — бегущих волн.

Учёт источников

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t). \tag{5}$$

$f(\mathbf{r}, t)$ — некоторая функция, характеризующая распределённые внешние воздействия.

Учёт диссипации и дисперсии

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \widehat{L}u = 0. \tag{6}$$

Структура дополнительных линейных членов $\widehat{L}u$ может быть различной в зависимости от конкретных физических механизмов взаимодействия волны со средой.

Уравнение (4) и его обобщения (5), (6) могут быть записаны как для скалярной переменной u, имеющей смысл, например, приращения плотности или давления в звуковой волне, так и для векторной переменной $\mathbf{u}$ (например, напряжённостей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ поля электромагнитной волны).

Замечание 3

Решение волнового уравнения должно находиться с учётом начальных и граничных условий, отвечающих физической постановке задачи.

Волновое уравнение

Обобщения на случаи неоднородных сред

Уравнениями (4) – (6) описываются волны в однородных изотропных средах.

1. Задачи, связанные с распространением волн в линейных диспергирующих и недиспергирующих средах с определением поля по заданным источникам с отражением и преломлением волн на границах раздела однородных сред, с распространением волн в волноводах, длинных линиях, других направляющих системах и т. д., сводятся к решению уравнений типа (4) – (6) с соответствующими начальными и граничными условиями.

2. Если среда неоднородна, т. е. свойства среды регулярным или случайным образом зависит от координат, то уравнение, описывающее волновой процесс, может быть приведено к виду аналогичному (4) или (5) в которых $v^2 \to v^2(\mathbf{r})$. Распространение электромагнитных волн в атмосфере и ионосфере, распространение низкочастотного звука в океане описывается волновыми уравнениями такого типа.

Если среда анизотропна, то процесс распространения волн может описываться гиперболическими уравнениями не второго, а более высокого (например, четвёртого) порядка, которые приводятся к уравнениям второго порядка только при специальных предположениях о характере протекания волнового процесса в анизотропной среде.

Задачи такого типа встречаются, например, при исследовании распространения электромагнитных волн в кристаллах, а также в плазме или феррите [6], находящихся в магнитном поле; упругих волн в изотропных твёрдых телах и т. д.

Гармонические волны

$$u = \frac{1}{2}\left[A(x,y,z)e^{i\omega t} + A^*(x,y,z)e^{-i\omega t}\right], \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (4), для функции $A(x,y,z)$ получим

Уравнение Гельмгольца (приведённое волновое уравнение)

$$\Delta A + k^2 A = 0, \qquad (8)$$

где $k^2 = \omega^2/v^2$. Если подставить (7) в (6), то мы опять получим для A уравнение (8), но k^2 в этом случае более сложным образом зависит от частоты и, вообще говоря, является комплексной величиной $k^2(\omega) = [k'(\omega) + ik''(\omega)]^2$.

При возбуждении в среде сильных полей уравнения, описывающие процесс распространения возмущений, уже нельзя свести к линейным волновым уравнениям. С учётом нелинейных членов они приобретают вид

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \widehat{L}_1 u + \widehat{L}_2 u^2 + \widehat{L}_3 u^3 + \ldots, \qquad (9)$$

где $\widehat{L}_1$, $\widehat{L}_2$, $\widehat{L}_3$ — некоторые линейные операторы. Сохранение этих членов в уравнении (9) позволяет описать различные нелинейные эффекты при распространении волн в среде. В нелинейных задачах нарушается принцип суперпозиции: возникает взаимодействие волн различных частот.

Общая схема решения

1. Записывается исходная система уравнений, описывающая волновое поле в среде (например, уравнения Максвелла для электромагнитного поля или уравнения механики для сплошной среды). Из неё, с помощью упрощений, допустимых в данной конкретной постановке задачи, получается (если это в принципе возможно) волновое уравнение одного из перечисленных выше типов, а также формулируются начальные и граничные условия.
2. Полученное уравнение решается при заданных начальных и граничных условиях.
3. Выполняется качественный и количественный анализ полученных результатов.

Пример 1 (Фок В. А. [7])

Строгое аналитическое решение задачи о дифракции электромагнитных волн на шаре (см. рис. 13) было найдено Густавом Ми в 1908 году [8]. Задача эта включает в себя как частный случай также и задачу о распространении радиоволн вокруг земной поверхности (при условии, что атмосфера считается однородной). Однако в случае радиоволн ряды, представляющие решение, отличаются столь медленной сходимостью, что не могут быть непосредственно применены к вычислению поля. Поэтому полученное общее решение удалось применить к случаю радиоволн лишь в 1918 году Ватсоном [9]. Но в некоторых отношениях преобразованная форма решения была по-прежнему неудовлетворительна, как по своей сложности, так и по тому, что она применима лишь в области геометрической тени (достаточно далеко за линией горизонта). Значительно более удобная форма решения была найдена Фоком в 1945 [10]. Таким образом, путь, который пришлось пройти от строгого решения, имевшего лишь теоретический интерес, к приближённому, практически применимому решению, занял примерно 40 лет.

Волновое уравнение

Пример диаграмм рассеяния, возникающих в задаче Ми

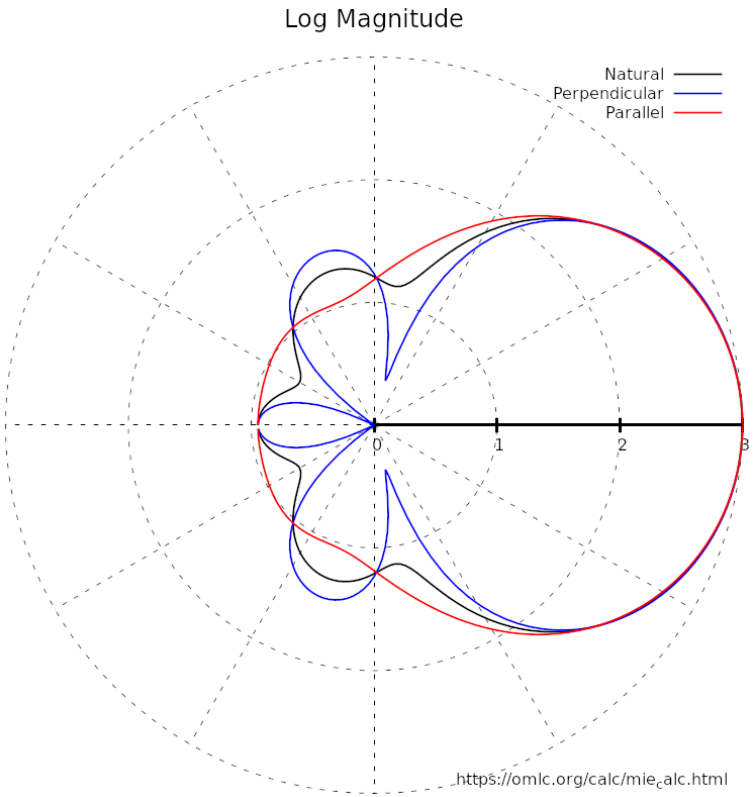


Рис. 13: Диаграмма рассеяния (в лографмическом масштабе по радиальной переменной) плоской волны с длиной волны $\lambda = 555$ нм, падающей слева на сферическую частицу диаметра $d = 0.5$ мкм с показателем преломления $n = 1.5$, построенная с помощью инструмента Interactive Mie Scattering Calculator [11]

Замечание 4

История с рассеянием Ми, приведённая в примере Фока, не заканчивается, т. к. работы по этой теме продолжают выходить и по сей день. В качестве подтверждения, достаточно привести из огромного числа публикаций только несколько ссылок [12—20].

В других случаях (в частности, в задаче о дифракции на препятствии произвольной формы) разработаны и широко используются аналитические, приближённые и численные методы, основанные на интегральных уравнениях [21—25], но общая схема решения задачи дифракции, состоящая из перечисленных выше трёх этапов, имеет место и здесь.

Контрольные вопросы и задания

1. Каким должно быть соотношение между параметрами ℓ и b на рис. 3 для того, чтобы можно было полностью пренебречь дифракционными эффектами для света видимого диапазона и использовать приближение геометрической оптики? Что изменится в этой численной оценке при рассмотрении низкочастотных звуковых волн (воспринимаемых человеческим слухом), распространяющихся в воздухе?
2. Ознакомьтесь с историей развития теории дифракции. Можно ли утверждать, что построение этой науки на текущий момент полностью завершено?
3. Напишите и решите дифференциальные уравнения, описывающие колебательные системы, изображённые на рис. 8 и 9.
4. В чём сходства и различия волн, представленных на рис. 10 – 12?
5. Какими способами вам доводилось решать уравнение (3)? Какие его обобщения вам известны? Знаете ли вы что-нибудь о функциональном (континуальном) интегрировании, и о возможности с его помощью [26] получать общее решение данного уравнения?
6. Может ли функция u, фигурирующая в волновом уравнении, иметь тензорный характер? Если это так, — приведите соответствующие примеры.
7. Что называют функцией Грина для уравнения (5)? Как её вычисляют и для чего используют?

Источники I

[1] Wikipedia. *Fresnel number — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_number. [Online; дата обращения — 07.01.2025].

[2] Б.М. Болотовский и Е.А. Галстьян. “Дифракция и дифракционное излучение”. В: *УФН* 170.8 (2000), с. 809—830. DOI: 10.3367/UFNr.0170.200008a.0809.

[3] M. Arndt и др. “Wave-particle duality of C60 molecules”. В: *Nature* 401 (1999), с. 680—682. DOI: 10.1038/44348.

[4] R.A. Abrahao и др. *The shadow of a laser beam*. 2024. arXiv: 2403.08050 [physics.optics]. URL: https://arxiv.org/abs/2403.08050.

[5] R. Mashiko, M. Naruse и R. Horisaki. “Diffraction casting”. В: *Advanced Photonics* 6.5 (2024), с. 056005. DOI: 10.1117/1.AP.6.5.056005.

Источники II

[6] П.А. Макаров и В.И. Щеглов. “О применении операторного формализма к решению задач электродинамики бигиротропных сред”. В: *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 1 (26) (2018), с. 3—16.

[7] В.А. Фок. *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. М.: Советское радио, 1970, с. 520.

[8] G. Mie. “Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen”. В: *Ann. Phys.* 330.3 (1908), с. 377—445. DOI: 10.1002/andp.19083300302.

[9] G.N. Watson и J.W. Nicholson. “The diffraction of electric waves by the earth”. В: *Proceedings of the Royal Society of London* 95.666 (1918), с. 83—99. DOI: 10.1098/rspa.1918.0050.

[10] В.А. Фок. “Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности”. В: *ЖЭТФ* 15.9 (1945), с. 479.

Источники III

[11] S. Prahl. *Interactive Mie Scattering Calculator*. https://omlc.org/calc/mie_calc.html. [Online; дата обращения — 25.01.2025].

[12] V.H. Weston и R. Hemenger. "High-Frequency Scattering From a Coated Sphere". В: *JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards—D. Radio Propagation* 66D.5 (1962), с. 613—619.

[13] W.J. Wiscombe. "Improved Mie scattering algorithms". В: *Applied Optics* 19.9 (1980), с. 1505—1509. DOI: 10.1364/AO.19.001505.

[14] A.A.R. Neves и D. Pisignano. "Effect of finite terms on the truncation error of Mie series". В: *Optics Letters* 37.12 (2012), с. 2418—2420. DOI: 10.1364/OL.37.002418.

[15] J. Shen и X. Jia. "Diffraction of a plane wave by an infinitely long circular cylinder or a sphere: solution from Mie theory". В: *Applied Optics* 52.23 (2013), с. 5707—5712. DOI: 10.1364/AO.52.005707.

Источники IV

[16] J.R. Allardice и E.C. Le Ru. “Convergence of Mie theory series: criteria for far-field and near-field properties”. В: *Applied Optics* 53.31 (2014), с. 7224—7229. DOI: 10.1364/AO.53.007224.

[17] D. Müller, F. Glöckler и A. Kienle. “Application of Mie theory for enhanced size determination of microparticles using optical particle counters”. В: *Applied Optics* 58.17 (2019), с. 4575—4584. DOI: 10.1364/AO.58.004575.

[18] M. Majic и E.C. Le Ru. “Numerically stable formulation of Mie theory for an emitter close to a sphere”. В: *Applied Optics* 59.5 (2020), с. 1293—1300. DOI: 10.1364/AO.379694.

[19] V.S. De Angelis, L.A. Ambrosio и G. Gouesbet. “Comparative numerical analysis between the multipole expansion of optical force up to quadrupole terms and the generalized Lorenz—Mie theory”. В: *Journal of the Optical Society of America B* 38.8 (2021), с. 2353—2361. DOI: 10.1364/JOSAB.432664.

Источники V

[20] C.R. Barker, M.D. King и A.D. Ward. “Separation-dependent near-field effects in Mie scattering spectra of two optically trapped aerosol droplets”. В: *Optics Express* 32.12 (2024), с. 21042—21060. DOI: 10.1364/OE.520251.

[21] В.И. Дмитриев и Е.В. Захаров. *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, с. 168.

[22] А.Б. Самохин и Ю.Ю. Капустин. “Интегральные уравнения для задач дифракции на магнитодиэлектрических телах”. В: *Дифференц. уравнения* 35.9 (1999), с. 1271—1277.

[23] А.В. Осетров. *Интегральные уравнения в теории дифракции акустических волн*. СПб: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2002, с. 56.

[24] Е.А. Осипов и Н.Б. Плещинский. “Сумматорные и интегральные уравнения переодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах”. В: *Известия вузов. Математика* 9 (2008), с. 76—82.

Источники VI

[25] С.И. Эминов. “Структура интегральных уравнений дифракции на полосе и отрезке кругового цилиндра”. В: *Известия вузов. Радиофизика* LX.12 (2017), с. 1093—1103.

[26] Г.В. Ефимов. *Метод функционального интегрирования*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018, с. 196.