Теория дифракции

Лекции 3 – 4. Плоские волны в однородной изотропной среде

П. А. Макаров





13 и 27 октября 2026 г.

Содержание

1. Плоские волны

2. Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

3. Поток энергии

4. Поляризация электромагнитных волн

5. Контрольные вопросы и задания

6. Источники

7. Приложение. Основы электродинамики

Простейшими решениями волновых уравнений, имеющими важнейшее значение, являются решения в виде плоских волн.

Определение 1

*В **плоской волне** возмущение u зависит только от расстояния, отсчитываемого вдоль некоторого фиксированного направления $\mathbf{m}$ ($|\mathbf{m}| = 1$), и времени, т. е.*

$$u = u(\zeta, t), \tag{1}$$

где

$$\zeta = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) \equiv \mathbf{rm} = xm_x + ym_y + zm_z. \tag{2}$$

Плоские волны

Первая каноническая форма волнового уравнения для плоских волн

Рассмотрим плоские волны в изотропной однородной среде, не учитывая поглощение, дисперсию и нелинейные эффекты. В такой среде волновой процесс описывается уравнением

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Для плоских волн оператор Лапласа преобразуется к виду $\Delta = \partial^2/\partial\zeta^2$, а волновое уравнение становится одномерным (точнее — $(1+1)$-мерным)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Запись (4) является одной из двух канонических форм волнового уравнения. Если от переменных ζ и t перейти к характеристическим переменным

$$\tau = t - \zeta/v, \quad \eta = t + \zeta/v, \tag{5}$$

то уравнение (4) преобразуется ко второй канонической форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0. \tag{6}$$

Интегрируя (6) последовательно по τ и η нетрудно найти его общее решение и, следовательно, исходного уравнения (4):

$$u = u_1(\tau) + u_2(\eta) = u_1\left(t - \zeta/v\right) + u_2\left(t + \zeta/v\right). \tag{7}$$

Здесь $u_1(\tau)$ и $u_2(\eta)$ — это *произвольные функции.*

Запись (4) является одной из двух канонических форм волнового уравнения. Если от переменных ζ и t перейти к характеристическим переменным

$$\tau = t - \zeta/v, \quad \eta = t + \zeta/v, \tag{5}$$

то уравнение (4) преобразуется ко второй канонической форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0. \tag{6}$$

Интегрируя (6) последовательно по τ и η нетрудно найти его общее решение и, следовательно, исходного уравнения (4):

$$u = u_1(\tau) + u_2(\eta) = u_1\left(t - \zeta/v\right) + u_2\left(t + \zeta/v\right). \tag{7}$$

Здесь $u_1(\tau)$ и $u_2(\eta)$ — это *произвольные функции.*
Каким физическим смыслом их можно наделить?

Плоские волны

К определению смысла функций $u_1(\tau)$ и $u_2(\eta)$. Исходные предпосылки

В любой фиксированный момент времени t функция $u_1(\tau)$ имеет постоянное значение в плоскости

$$\Pi = \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \zeta = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) = \text{const} \right\}. \qquad (8)$$

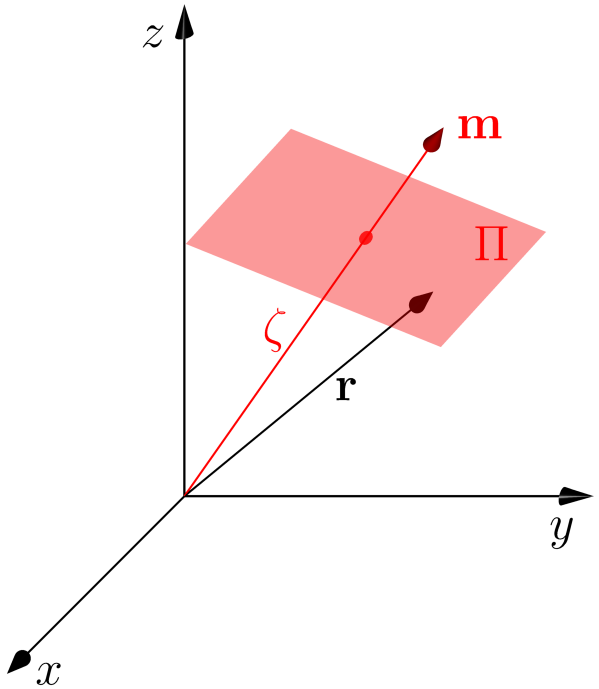


Рис. 1: Однородная плоская волна, распространяющаяся в направлении вектора **m**

Если при увеличении времени t на величину Δt вектор $\mathbf{r}$ изменится на величину $\Delta\mathbf{r}$ так, что аргумент τ функции u_1 останется постоянным, то связь между Δt и $\Delta\mathbf{r}$ будет задана выражением

$$\tau = t - \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{m})}{v} = t + \Delta t - \frac{((\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\cdot\mathbf{m})}{v} = \text{const}$$

или $v\Delta t = (\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{m})$. Отсюда очевидно, что конец вектора $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ также лежит на плоскости (теперь уже Π'), вектором нормали к которой по-прежнему является $\mathbf{m}$.

Следовательно, плоскость, определяемая соотношением (8), перемещается в направлении $\mathbf{m}$ на расстояние $v\Delta t$ за время Δt, т. е. эта плоскость движется в пространстве ($\Pi \to \Pi'$) со скоростью v.

Утверждение 1

Таким образом, функция $u_1(t - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})/v)$ *описывает плоскую волну, бегущую в направлении* $\mathbf{m}$.

Аргумент $\tau = t - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})/v$ функции u_1 определяет *фазу волны.* Плоскость, на которой фаза волны постоянна, перемещается в пространстве со скоростью v.

Следствие 1

Очевидно, что функция $u_2(t + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})/v)$ *описывает волну, бегущую со скоростью* v *в противоположном направлении* $-\mathbf{m}$.

Определение 2

Поверхность, на которой фаза волны фиксирована, называется ***волновым фронтом*** *(или* ***волновой поверхностью****).*

Комбинируя вместе определения 1 и 2 можно утверждать, что плоские волны — это волны с плоским волновым фронтом.

Замечание 1

Часто для ограниченных во времени (а следовательно, и в пространстве) распространяющихся возмущений ***фронтом волны*** *называется поверхность, которой достиг волновой процесс к данному моменту времени, т.е. граница между возмущённой и невозмущённой областями пространства.*

Плоские волны

Уравнение переноса (Advection equation)

Возмущения, бегущие только в одну сторону (например, в положительном направлении оси ζ), могут быть описаны также уравнением первого порядка (ср. с (4))

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Если вместо t ввести характеристическое или "местное" время $\tau = t - \zeta/v$, т. е. наблюдать за волной, двигаясь вместе с ней со скоростью её распространения, то в новых переменных τ, ζ уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial u(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = 0.$$

Решением этого уравнения является волна, не изменяющая формы своего профиля при изменении ζ, т. е. стационарная волна: $u = u_1(\tau)$.

Плоские волны, описываемые произвольными функциями $u_1(\tau)$ и $u_2(\eta)$, часто удобно рассматривать как суперпозицию гармонических волн. Для этого необходимо, чтобы функции u_1 и u_2 можно было представить в виде интегралов Фурье

$$u_{1,2}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{1,2}(\zeta, \omega)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega, \tag{10}$$

где

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{1,2}(\zeta, t)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (4), найдём, что функции $u_{1,2}$ будут решениями волнового уравнения, если их образы $F_{1,2}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega^2}{v^2} F_{1,2} = 0. \tag{12}$$

Решение (12) может быть записано в виде

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = A_{1,2}(\omega)\, e^{\pm ik\zeta}, \tag{13}$$

где $k = \omega / v$.

Таким образом, функции $A_{1,2} \exp\left[i(\pm k\zeta - \omega t)\right]$ под знаком интеграла (10) описывают гармонические плоские волны.

Переходя к декартовым координатам, фазу гармонической плоской волны можно записать в виде

$$k(xm_x + ym_y + zm_z) - \omega t = \mathbf{kr} - \omega t, \tag{14}$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{m}$.

Уравнение $\mathbf{kr} = \text{const}$ определяет плоскость равной фазы.

Если $\mathbf{k}$ — действительный вектор, амплитуды волн $A_{1,2}$ постоянны всюду, в том числе и в плоскости равной фазы. В этом случае функции $A_{1,2} \exp\left[i(\pm k\zeta - \omega t)\right]$ называют однородными плоскими волнами.

Функции $F_{1,2}$ будут удовлетворять уравнению (12) и в том случае, если k — комплексный вектор: $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$, при условии, что его модуль по-прежнему равен k, т. е.

$$(k')^2 - (k'')^2 + 2i\left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''\right) = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Так как для сред без поглощения k^2 — действительное число, то между действительной $\mathbf{k}'$ и мнимой $\mathbf{k}''$ частями волнового вектора существует связь

$$(k')^2 - (k'')^2 = k^2, \tag{15}$$

$$\left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''\right) = 0. \tag{16}$$

Соответствующее решение

$$u(\mathbf{r}, t) = A_1 \exp\left[-\mathbf{k}''\mathbf{r} - i(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})\right] \tag{17}$$

описывает плоскую неоднородную волну.

Плоские волны

Дополнительные замечания о неоднородных плоских волнах

- Поверхности равных фаз и равных амплитуд — плоские, но они не совпадают друг с другом. В силу условия (16) плоскости равных фаз и равных амплитуд взаимно ортогональны. Из условия (15) следует, что волновое число k' для неоднородной волны больше волнового числа однородной волны в той же среде (пространственный период поля меньше длины волны λ).
- При учёте поглощения величина $k^2(\omega)$ становится комплексной, и угол между плоскостями равных фаз и амплитуд может быть любым. При $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$ эти плоскости совпадают, и волна становится плоской однородной волной.
- Сферические и цилиндрические волны можно представить в виде суперпозиции однородных и неоднородных плоских волн. При удалении от источника неоднородные волны затухают.
- Плоские неоднородные волны могут возникать при падении плоских однородных волн на границу раздела двух сред. Обратное также верно — при падении на границу раздела неоднородной волны может возникнуть однородная плоская волна.

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{19}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{20}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{21}$$

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{22}$$

Замечание 2

Система (18) – (21) *не является полной. В неё входят пять векторных величин:* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$, *для определения которых необходимо иметь пять векторных уравнений, однако система* (18) – (21) *содержит лишь два векторных и два скалярных уравнения, причём уравнение* (20) *есть следствие уравнений* (18) *и* (22), *а* (21) *является следствием* (19).

Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

Доказательство того, что (21) является следствием (19)

Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей (19) с учётом тождества $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, получим соотношение

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{23}$$

Перестановка операторов $\partial/\partial t$ и div правомерна в силу условия непрерывности векторов поля.

Если проинтегрировать (23) и допустить, что когда-либо в прошлом электромагнитное поле отсутствовало (что позволяет положить постоянную интегрирования равной нулю), получим уравнение (21), являющееся математическим выражением экспериментального факта отсутствия свободных магнитных зарядов.

Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

Доказательство того, что (20) является следствием (18) и (22)

Уравнение (20) можно получить, взяв дивергенцию от обеих частей (18):

$$0 = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

С учётом уравнения непрерывности (22) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\rho) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Таким образом, получается уравнение (20), являющееся математическим выражением закона Кулона.

Для расчёта электромагнитных полей в различных средах систему уравнений (18) – (21) необходимо дополнить системой материальных уравнений:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}). \tag{24}$$

Эти три уравнения отражают свойства конкретной рассматриваемой среды и должны быть добавлены к уравнениям Максвелла, чтобы они приобрели определённость.

Пример 1

В вакууме

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = 0.$$

Связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ зависит от характера взаимодействия электромагнитного поля с веществом и может иметь очень сложный вид. Она может быть нелинейной, нелокальной, учитывать анизотропию и наследственные свойства («память») среды. Это означает, в частности, что значения векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ в какой-либо точке $\mathbf{r}$ в момент времени t могут зависеть от значений векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в других точках пространства в предшествующие моменты времени. Такая связь между векторами приводит к появлению частотной и пространственной дисперсии, существенно влияющей на процессы распространения волн.

Мы не будем касаться всех отмеченных выше вопросов, всегда считая выполненными следующие два условия.

1. Характерные внутренние пространственные масштабы среды и временные промежутки малы настолько, что они не сказываются на распространении волны.
2. Связь между векторами локальна и линейна.

Материальные уравнения (24) в этом случае имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{25}$$

Для изотропной однородной среды ε, μ — константы, называемые электрической и магнитной проницаемостью соответственно, σ — проводимость.

Если среда проводящая ($\sigma \neq 0$), то подставляя (25) в уравнения (20) и (22), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0, \quad \rho = \rho_0\, e^{-t/t_0},$$

где $t_0 = \varepsilon/4\pi\sigma$. В среде, обладающей проводимостью, плотность свободных зарядов убывает со временем. Таким образом, система уравнений (18)–(21) с учётом материальных уравнений (25) запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Исключим из системы (26) вектор $\mathbf{H}$, для чего применим операцию rot к обеим частям второго из уравнений (26). Учитывая, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E},$$

получим

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{27}$$

Если $\sigma = 0$, т. е. среда не обладает проводимостью, то вектор $\mathbf{E}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{28}$$

Таким же уравнениям удовлетворяет и вектор $\mathbf{H}$.

В случае электромагнитного поля, в котором векторы **E** и **H** зависит лишь от одной пространственной координаты $\zeta = \mathbf{rm}$ и времени t, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{29}$$

Аналогичное уравнение справедливо и для вектора **H**. Каждая из декартовых компонент векторов **E** и **H** будет при этом удовлетворять одномерному скалярному уравнению (4), решение которого в виде бегущих плоских волн рассмотрено в п. 1. Уравнение (29) описывает процесс распространения в направлениях $\pm\mathbf{m}$ со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ двух плоских векторных волн

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{E}\left(t \mp \zeta/v\right).$$

Аналогично

$$\mathbf{H}_{1,2} = \mathbf{H}\left(t \mp \zeta/v\right).$$

Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

Структура бегущих плоских электромагнитных волн. Начало

Для определения структуры этих волн необходимо обратиться к уравнениям Максвелла. Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении $+\mathbf{m}$. В этом случае

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial\zeta}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{E}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial\zeta}[\mathbf{m}\times\mathbf{E}]$$

и система уравнений (18)–(21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\zeta}[\mathbf{m}\times\mathbf{E}] = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, && \frac{\partial}{\partial\zeta}[\mathbf{m}\times\mathbf{H}] = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ &\frac{\partial}{\partial\zeta}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{E}) = 0, && \frac{\partial}{\partial\zeta}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Из последних двух уравнений (30) следует, что $\partial E_\zeta/\partial\zeta = 0$ и $\partial H_\zeta/\partial\zeta = 0$, т. е. проекции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на направление распространения волны если и не равны нулю, то могут зависеть только от времени.

Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

Структура бегущих плоских электромагнитных волн. Продолжение

Умножая теперь скалярно первые два уравнения (30) на вектор $\mathbf{m}$, получим $\partial E_\zeta/\partial t = \partial H_\zeta/\partial t = 0$. Иными словами, проекции E_ζ и H_ζ не зависят также и от времени, т. е. тождественно равны нулю. Это означает, что электромагнитные волны в диэлектрической среде являются *поперечными волнами,* а векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ лежат в плоскости фронта волны. В проводящей среде $\partial E_\zeta/\partial\zeta = 0$, однако из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\mathbf{m}\times\mathbf{H}\right] = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

в случае $\sigma \neq 0$ следует, что

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_\zeta}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\sigma E_\zeta, \quad E_\zeta = E_\zeta(0)\exp\left(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t\right).$$

Продольная компонента вектора $\mathbf{E}$ убывает со временем, а поэтому и в проводящей среде электромагнитное поле также поперечно.

Найдём теперь связь между векторами **H** и **E** в бегущей плоской волне. Вводя координату $\tau = t - \zeta/v$, получим $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$, $\partial/\partial\zeta = -\partial/(v\partial\tau)$. Второе из уравнений (30) примет вид

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{v}\left[\mathbf{m}\times\mathbf{H}\right]+\frac{\varepsilon}{c}\mathbf{E}\right\}=0,\quad \mathbf{E}=-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\mathbf{m}\times\mathbf{H}\right]. \tag{31}$$

Константу, получаемую при интегрировании по τ, следует положить равной нулю, поскольку рассматриваются только переменные электромагнитные поля.
Как следует из (31) векторы **E**, **H**, **m** образуют правую ортогональную тройку векторов. Величина

$$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{32}$$

определяющая количественную связь между напряжённостями электрического и магнитного полей, называется *импедансом среды.*

Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

Уравнение Гельмгольца для проводников

Если среда обладает проводимостью, то распространение волны описывается уравнением (27). В этом случае без изменения формы может распространяться только гармоническая волна.

Рассмотрим распространение плоской гармонической волны. Принимая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\zeta)e^{-i\omega t}$, для комплексной амплитуды получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}_0 = 0, \qquad (33)$$

которое отличается от аналогичного уравнения для идеальной среды только тем, что вместо действительного коэффициента $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon/c^2$ в него входит комплексная величина

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon^{\mathrm{c}}.$$

Решение уравнения (33) можно записать в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_1\, e^{ik\zeta} + \mathbf{A}_2\, e^{-ik\zeta}, \quad \text{где} \quad k = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(\zeta, t) = \mathbf{A}_1\, e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa\zeta}\, e^{-i\omega\left(t-\frac{n}{c}\zeta\right)} + \mathbf{A}_2\, e^{\frac{\omega}{c}\varkappa\zeta}\, e^{-i\omega\left(t+\frac{n}{c}\zeta\right)}. \qquad (34)$$

Решение (34) получено в виде двух бегущих плоских однородных волн, амплитуды которых убывают по мере распространения.
Величина $\varkappa$ характеризует скорость убывания амплитуды волны в направлении распространения и называется *показателем поглощения* (следует отличать от коэффициента поглощения, равного $k'' = \frac{\omega}{c}\varkappa$). Величина $n = c/v$ определяет фазовую скорость волны в среде и называется *показателем преломления.*

Плоские ЭМВ в однородной изотропной среде

Тангенс угла потерь

Выясним теперь, как зависят показатели n и $\varkappa$ от частоты волны и параметров среды. Введём величину

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}, \tag{35}$$

называемую *тангенсом угла потерь.* Приравнивая действительные и мнимые части равенства

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu(1 + i\operatorname{tg}\delta) = \frac{\omega^2}{c^2}(n + i\varkappa)^2, \tag{36}$$

получим систему уравнений для нахождения n и $\varkappa$:

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu, \quad 2n\varkappa = \varepsilon\mu\operatorname{tg}\delta. \tag{37}$$

Решение этой системы даёт искомые зависимости

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}+1\right)}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}-1\right)}. \tag{38}$$

Замечание 3

Важно отметить, что в проводящей среде n и $\varkappa$ зависят от частоты (поскольку $\operatorname{tg}\delta \sim \omega^{-1}$), т. е. проводящая среда является диспергирующей. При распространении плоской волны произвольной формы происходит искажение её профиля, поскольку фазовая скорость и коэффициент затухания различных частотных составляющих не одинаковы.

Рассмотрим далее предельные случаи малых и больших потерь.

Для слабо затухающей волны ($\operatorname{tg}\delta \ll 1$)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \text{const}, \quad \varkappa \equiv \varkappa(\omega) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{2} \operatorname{tg}\delta.$$

Этот случай в некотором смысле аналогичен акустическому: дисперсии нет, а диссипация частотно-зависима.

Для волны, испытывающей сильное затухание ($\operatorname{tg}\delta \gg 1$)

$$n \approx \varkappa = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\operatorname{tg}\delta} = \sqrt{2\pi\frac{\mu\sigma}{\omega}}. \tag{39}$$

Величина потерь и фазовая скорость в проводящей среде определяются не только значениями ε, σ и μ, но и существенным образом зависят от частоты.
Однако в случае $\operatorname{tg}\delta \gg 1$ волновой процесс практически не реализуется, поскольку волна затухает на очень малых расстояниях. Убывание амплитуды в e раз происходит на длине

$$d = \frac{c}{\omega\varkappa} = \frac{\lambda}{2\pi\varkappa}.$$

В хороших проводниках $\varkappa \approx n \gg 1$ (см. (39)), следовательно, глубина проникновения электромагнитной волны в проводящую среду (толщина скин-слоя) $d \ll \lambda$.

Поток энергии

Закон сохранения энергии электромагнитного поля

В среде, не обладающей проводимостью, энергия электромагнитного поля сохраняется[1]. Закон сохранения энергии можно записать в интегральной форме

$$\int W(\mathbf{r}, t)\, \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \text{const} \tag{40}$$

или эквивалентной дифференциальной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \tag{41}$$

Здесь W — объёмная плотность энергии, $\mathbf{S}$ — поток энергии.

[1] В более общем случае (учитывающим диссипацию энергии электромагнитного поля в проводящих средах, а также её преобразование в механическую работу) этот вопрос рассмотрен, например, в [1, п. 1.1.4].

Поток энергии

Плотность и поток энергии электромагнитного поля

Для нахождения явного вида величин W и $\mathbf{S}$ воспользуемся системой уравнений Максвелла для среды без дисперсии (26), в которой положим $\sigma = 0$. Умножая первое уравнение (26) на $\mathbf{E}$, второе на $\mathbf{H}$ и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{\varepsilon}{c}\,\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu}{c}\,\mathbf{H}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\,\mathrm{div}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] \qquad (42)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} + \mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] = 0. \qquad (43)$$

Сравнивая (43) с (41), находим выражение для плотности и потока энергии

$$W = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,. \qquad (44)$$

Второе выражение (44) называется *вектором Умова — Пойнтинга.*

Замечание 4

Сохранение полной энергии (40) *имеет место в достаточно большой области, на границах которой поток энергии* $\mathbf{S}$ *равен нулю. Внутри же этого объёма происходит перенос энергии из одной его части в другую, обусловленный распространением в системе электромагнитных волн.*

Поток энергии

Средний за период поток энергии для гармонических волн

Если рассматривается гармонический во времени волновой процесс, то физический смысл имеют средние за период значения $\mathbf{S}$ и W. Поскольку $\mathbf{S}$ и W — квадратичные функции от векторов поля, то при их вычислении необходимо пользоваться полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, записанными в действительном виде. При использовании для удобства расчёта комплексных величин в (44) нужно подставить для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соответственно выражения: $(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*)/2$ и $(\mathbf{H}+\mathbf{H}^*)/2$. Для среднего за период вектора $\mathbf{S}$ имеем

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{16\pi} \left\langle [\mathbf{E}\times\mathbf{H}] + [\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}] + [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}^*] \right\rangle.$$

Угловые скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение. Учитывая, что зависимость полей от времени имеет вид $e^{\pm i\omega t}$, получим

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{16\pi} \left([\mathbf{E}^*\times\mathbf{H}] + [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] \right) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]. \qquad (45)$$

Поток энергии

Связь **S** и W в плоской волне

Покажем, что плотность потока энергии в плоской волне равна произведению плотности энергии на скорость распространения волны. Используя соотношение (31), придём к выражению

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[\mathbf{E}\times[\mathbf{m}\times\mathbf{E}^*]] = \frac{1}{8\pi}\,\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\varepsilon\,|\mathbf{E}|^2\,\mathbf{m} = \boldsymbol{v}\,\langle W\rangle, \quad (46)$$

где $|\boldsymbol{v}| = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, а направление скорости переноса энергии совпадает с направлением распространения волны **m**. Учитывая (46), соотношение (41) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}W) = 0. \quad (47)$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии рассмотренного волнового процесса.

Поляризация электромагнитных волн

Общие замечания о поляризации векторных волн различной природы

Электромагнитная волна имеет векторный характер. Для её полного описания необходимо кроме амплитуды, фазы и частоты указать поляризацию волны, т. е. направление векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в пространстве. Для плоской волны нужно знать направление $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в плоскости волнового фронта.

Необходимо отметить, что поляризованными могут быть поперечные волны иной физической природы — например, волны в струне или упругом твёрдом теле, однако здесь для определённости мы ограничимся описанием поляризации только электромагнитных волн.

Поляризация электромагнитных волн

Компоненты вектора **E** плоской гармонической волны

Пусть направление распространения плоской гармонической волны совпадает с осью z. Разложим вектор $\mathbf{E}$ в плоскости xy по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 2)

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 \cos(\omega\tau + \varphi_1) = \mathrm{Re}\left(a_1\, e^{-i\omega\tau - i\varphi_1}\right), \\ E_y &= a_2 \cos(\omega\tau + \varphi_2) = \mathrm{Re}\left(a_2\, e^{-i\omega\tau - i\varphi_2}\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Здесь $\tau = t - z/v$; a_1, a_2; φ_1, φ_2 — постоянные действительные амплитуды и фазы ортогональных проекций вектора $\mathbf{E}$.

Поляризация электромагнитных волн

Компоненты вектора **E** и эллипс поляризации

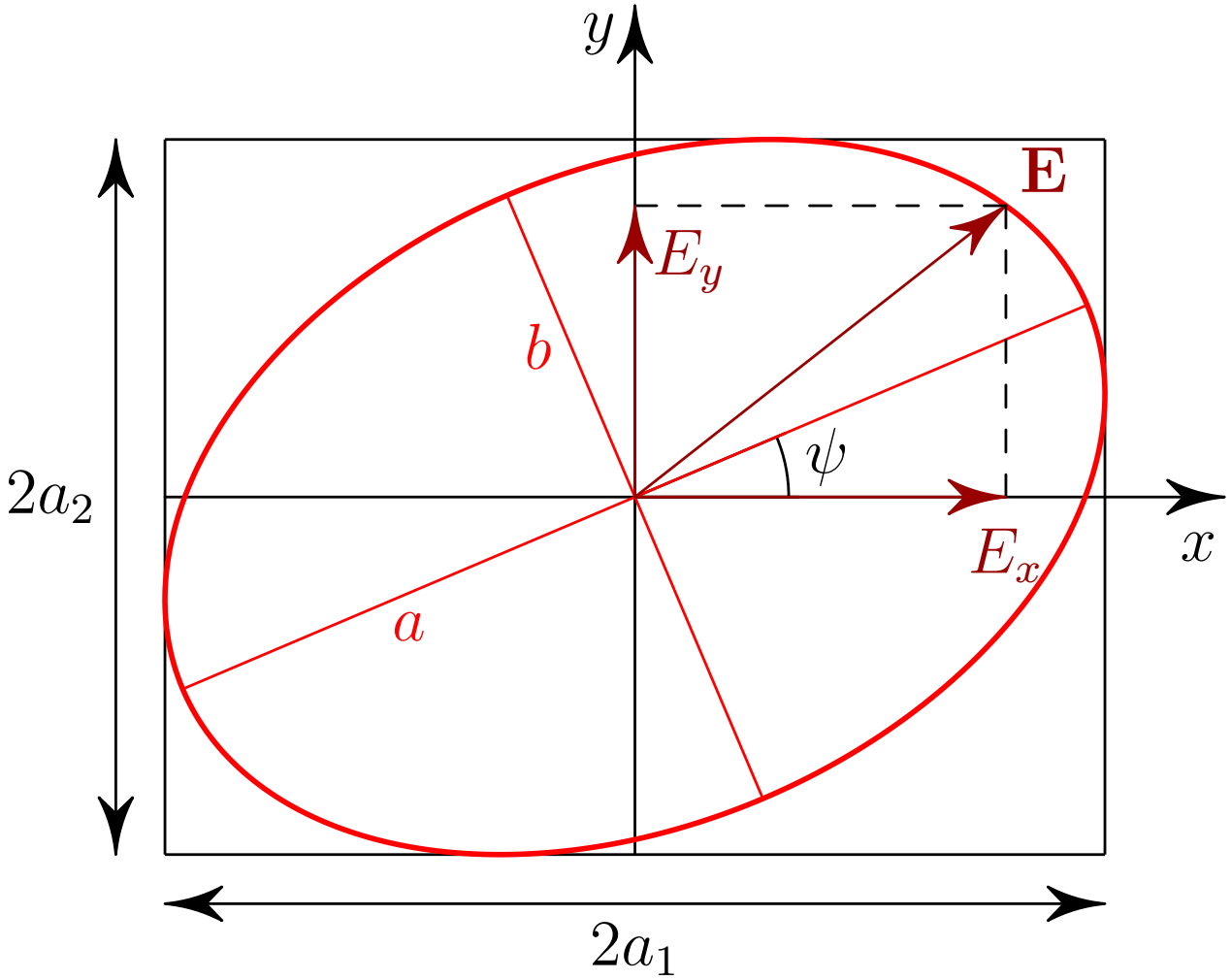


Рис. 2: Эллиптически-поляризованная волна

Поляризация электромагнитных волн

Частные случаи различных поляризаций

Определим, как изменяется положение вектора $\mathbf{E}$ в плоскости xy. Исключая из соотношений (48) временной множитель, получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_1 a_2}\cos\Delta = \sin^2\Delta, \quad \Delta = \varphi_2 - \varphi_1. \qquad (49)$$

Если $\Delta = \pm\pi/2$, уравнение (49) переходит в следующее:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 1,$$

т. е. при $\Delta = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$ оси эллипса совпадают с осями координат.
При $a_1 = a_2$ эллипс вырождается в окружность.
В случае $\Delta = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, из уравнения (49) следует

$$\left(\frac{E_x}{a_1} \pm \frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 0.$$

Это уравнение двух прямых, углы наклона которых $\chi_{1,2}$ к оси x определяются отношением a_2/a_1. Так, $\operatorname{tg}\chi_{1,2} = \pm a_2/a_1$.

Поляризация электромагнитных волн

Множитель поляризации и его свойства

Состояние поляризации гармонической волны удобно характеризовать множителем поляризации

$$\mathcal{P} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} e^{i\Delta}. \tag{50}$$

- При комплексном $\mathcal{P}$ волна имеет эллиптическую поляризацию.
- При чисто мнимом $\mathcal{P}$ оси эллипса совпадают с осями координат.
- Когда $\mathcal{P} = \pm i$, поляризация круговая.
- В случае действительного $\mathcal{P}$ волна поляризована линейно.
- Знак мнимой части $\mathcal{P}$ определяет направление вращения вектора $\mathbf{E}$ в плоскости поляризации. Знак «$+$» соответствует правой, «$-$» — левой поляризации.

Право-поляризованной называется волна, у которой вращение вектора $\mathbf{E}$ для наблюдателя, смотрящего в направлении её приближения, происходит по часовой стрелке.

Таким образом, если отношение амплитуд ортогональных проекций вектора **E** и сдвиг фаз между ними не изменяются, т. е. E_x и E_y когерентны, то электромагнитная волна поляризована.

В отличие от гармонических волн, которые всегда поляризованы, часто имеют дело со сложной случайной зависимостью от времени амплитуд $a_1(t)$, $a_2(t)$ и разности фаз $\Delta(t)$, когда все положения вектора **E** в плоскости фронта волны оказываются равновероятными. Такая волна называется неполяризованной («естественный свет»).

Поляризация электромагнитных волн

Об экспериментальном определении поляризации

Поляризацию волны можно определить из экспериментов, если фиксировать изменение во времени мгновенных значений компонент E_x и E_y. Однако провести такие измерения для быстро изменяющихся полей затруднительно в силу инерционных свойств измерительных приборов.

Состояние поляризации можно также определить, измеряя зависимость интенсивности излучения от направления в плоскости xy. Если волна поляризована линейно, то средняя интенсивность отлична от нуля только в одном направлении. Для волны, поляризованной по кругу, распределение средней интенсивности будет равномерным по всей плоскости, так же, как и для неполяризованной волны. Поэтому наличие круговой поляризации путём измерения интенсивности в разных направлениях плоскости xy не может быть установлено непосредственно. Однако если ввести фазовую задержку на $\pi/2$ в одну из прямоугольных компонент вектора $\mathbf{E}$, то волна с круговой поляризацией превратится в линейно-поляризованную, волна же неполяризованная не изменится.

Поляризация электромагнитных волн

Частично-поляризованные волны

Полностью поляризованные и полностью неполяризованные волны представляют два противоположных предельных случая регулярного или случайного состояния поляризации волны. Часто приходится иметь дело с частично-поляризованными волнами, представляющими собой суперпозицию полностью неполяризованной и полностью поляризованной волны. Дело в том, что волны, которые мы считаем монохроматическими, в действительности всегда являются квазимонохроматическими. Их можно рассматривать как суперпозицию монохроматических волн с частотами в некотором промежутке $\Delta\omega$. В данной точке пространства поле такой волны будет описываться функцией

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{a}(t)e^{-i\omega t - i\varphi(t)}, \tag{51}$$

где $\mathbf{a}(t)$ — амплитуда, $\varphi(t)$ — фаза, которые на интервале $T = 2\pi/\omega$ меняются мало.

Состояние поляризации как монохроматических (и полностью поляризованных), так и немонохроматических (частично поляризованных) волн можно охарактеризовать единым образом с помощью матрицы когерентности

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени наблюдения, которое должно быть значительно больше, чем $T = 2\pi/\omega$.

След матрицы (52) равен интенсивности волны

$$\mathrm{Sp}\, I_{\alpha\beta} = \langle |E_x|^2 + |E_y|^2 \rangle = I. \tag{53}$$

В случае полностью поляризованной волны $\langle E_\alpha E_\beta^* \rangle = E_\alpha E_\beta^*$, поскольку произведения $E_\alpha E_\beta^*$ от времени не зависят. Для неполяризованной волны определитель матрицы когерентности $\det I_{\alpha\beta} = I^2/4$, поскольку в этом случае $\langle E_x E_y^* \rangle = \langle E_y E_x^* \rangle = 0$, а $|E_x|^2 = |E_y|^2 = I/2$. Для полностью поляризованной волны $\det I_{\alpha\beta} = 0$. В случае волны с частичной поляризацией для определителя выполнено неравенство

$$0 \leqslant \det I_{\alpha\beta} \leqslant \frac{I^2}{4}. \tag{54}$$

Подставляя в (52) выражения (48) для E_x, E_y удаётся придать матрице когерентности следующий вид:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \langle a_1^2 \rangle & \langle a_1 a_2 e^{i\Delta} \rangle \\ \langle a_1 a_2 e^{-i\Delta} \rangle & \langle a_2^2 \rangle \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Таким образом, состояние поляризации полностью характеризуется заданием величин

$$\langle a_1^2 \rangle,\ \langle a_1 a_2 e^{i\Delta} \rangle,\ \langle a_1 a_2 e^{-i\Delta} \rangle \text{ и } \langle a_2^2 \rangle, \text{ где } \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle = I.$$

Вместо этих четырёх величин часто удобно вводить другие:

$$\xi_1 = \frac{\langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle}{I}, \quad \xi_2 = \frac{2}{I} \langle a_1 a_2 \cos\Delta \rangle, \quad \xi_3 = \frac{2}{I} \langle a_1 a_2 \sin\Delta \rangle. \tag{56}$$

Величины $\xi_{1,2,3}$ называются *параметрами Стокса.*

Матрица когерентности через параметры Стокса выражается следующим образом:

$$I_{\alpha\beta} = \frac{I}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_1 & \xi_2 + i\xi_3 \\ \xi_2 - i\xi_3 & 1-\xi_1 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

- Для неполяризованной волны $\xi_{1,2,3} = 0$.
- Для полностью поляризованной $\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = 1$.
- Сумма квадратов параметров Стокса характеризует степень поляризации волны

$$p^2 = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2. \tag{58}$$

Поляризация электромагнитных волн

Физический смысл степени поляризации и параметров Стокса

Если интенсивность волны равна I, то интенсивность её поляризованной части

$$I_{\text{p}} = pI, \tag{59}$$

а неполяризованной

$$I_{\text{np}} = (1 - p)I. \tag{60}$$

Физический смысл параметров Стокса

- $I\xi_1$ — разность интенсивностей линейно-поляризованных волн при $\chi = 0^\circ$ и $\chi = 90^\circ$;
- $I\xi_2$ — то же самое для $\chi = 45^\circ$ и $\chi = 135^\circ$;
- $I\xi_3$ — разность интенсивностей волн с правой и левой круговой поляризацией.

Параметры Стокса могут быть легко измерены в эксперименте.

С помощью параметров Стокса или матрицы когерентности можно находить поляризацию суммарного поля при суперпозиции нескольких волн. Матрица когерентности результирующей волны равна сумме матриц отдельных волн.

Можно также решить задачу о разложении частично-поляризованной волны на полностью поляризованную и не поляризованную части и определить характер поляризации поляризованной компоненты поля. Для этого матрицу когерентности нужно записать в виде

$$I_{\alpha\beta} = \frac{I}{2}(1-p)\delta_{\alpha\beta} + \frac{I}{2}\,p \begin{pmatrix} 1+\xi_1/p & (\xi_2+i\xi_3)/p \\ (\xi_2-i\xi_3)/p & 1-\xi_1/p \end{pmatrix}. \qquad (61)$$

Поляризация электромагнитных волн

Связь параметров эллипса поляризации с параметрами Стокса

Обозначая главные оси эллипса через a и b, а через ψ — угол, который составляет большая ось эллипса с осью x, легко найти следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a_1^2 + a_2^2 = I, \\ \operatorname{tg} 2\psi &= \operatorname{tg} 2\chi \cos\Delta, \\ \sin 2\alpha &= \sin 2\chi \sin\Delta. \end{aligned} \tag{62}$$

Здесь $\operatorname{tg}\alpha = \pm b/a$, а $\operatorname{tg}\chi = a_2/a_1$. С помощью формул (62) выражаем

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2a_1 a_2 \cos\Delta}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \sin 2\alpha = \xi_3, \tag{63}$$

определяя тем самым ориентацию и отношение осей эллипса. В этих формулах $\xi_{1,2,3}$ — параметры Стокса для поляризованной части волны.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что для плоской волны (в смысле определения 1 из п. 1) оператор Лапласа действительно может быть приведён к виду $\Delta = \partial^2/\partial\zeta^2$.

2. Дополните рис. 1 так, чтобы он полностью иллюстрировал ход рассуждений, приведших к утверждению 1 и следствию 1 п. 1.

3. При выводе волнового уравнения для электромагнитного поля (28) была допущена некоторая непоследовательность. Определите её, и найдите более точное условие, при котором имеет место уравнение (28).

4. Докажите справедливость соотношения (46).

5. Выведите соотношения (62).

Источники

[1] М. Борн и Э. Вольф. *Основы оптики*. 2-е, испр. М.: Наука, 1973, с. 720.

Приложение. Основы электродинамики

Закон Кулона и электрическое поле

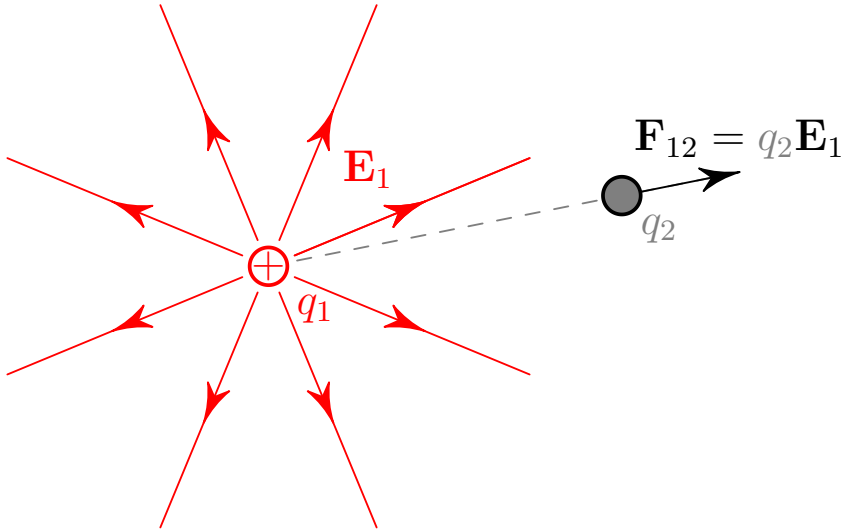


Рис. 3: Электростатическое взаимодействие двух точечных зарядов

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\mathbf{e}_{12}, \quad \varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}. \tag{64}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{F}_{12} = q_2\mathbf{E}_1. \tag{65}$$

$$[\mathbf{r}] = 1\ \text{м}, \quad [q] = 1\ \text{Кл}, \quad [\varepsilon_\mathrm{r}] = 1, \quad [\mathbf{F}] = 1\ \text{Н}, \quad [\mathbf{E}] = 1\ \text{В/м}.$$

Определение

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad [\mathbf{D}] = 1\ \text{Кл/м}^2. \tag{66}$$

Теорема Гаусса (интегральная форма)

$$\oint\limits_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{s} = Q. \tag{67}$$

Пример: поток индукции $\mathbf{D}$ поля точечного заряда

$$\oint\limits_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = q_1. \tag{68}$$

Приложение. Основы электродинамики

Основные уравнения электростатики

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{69}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \tag{70}$$

$$[\rho_v] = 1 \text{ Кл/м}^3.$$

$$\text{Т. к. } \nabla \times \nabla f = 0, \quad \forall f, \text{ то (69)} : \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{71}$$

$$\varphi_a - \varphi_b = -\int_a^b \nabla\varphi \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\ell}. \tag{72}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} = -\nabla\varphi. \tag{73}$$

$$\operatorname{div}(73),\ \varepsilon \neq \varepsilon(\mathbf{r}) : \quad \frac{1}{\varepsilon}\nabla \cdot \mathbf{D} \underset{(70)}{=} \frac{\rho_v}{\varepsilon} = -\nabla \cdot \nabla\varphi. \tag{74}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}. \tag{75}$$

Теорема Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, \mathrm{d}v. \tag{76}$$

$$Q = \int_V \rho_v \, \mathrm{d}v. \tag{77}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, \mathrm{d}v = \int_V \rho_v \, \mathrm{d}v. \tag{78}$$

Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}. \tag{79}$$

Приложение. Основы электродинамики

Граничные условия для электрического поля

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \tag{80}$$

$$[\rho_s] = 1 \text{ Кл/м}^2.$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0. \tag{81}$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{82}$$

$$[\mathbf{J}] = 1 \text{ А/м}^2, \quad [\sigma] = 1 \text{ См/м}.$$

Закон сохранения заряда

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \tag{83}$$

Идеальные проводники

Материалы с бесконечной проводимостью:

$$\sigma = \infty, \quad \text{а т. к. } \mathbf{J} \neq \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \text{const}\,.$$

Сила Лоренца, действующая на заряд в магнитном поле

$$\mathbf{F} = q\left[\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}\right]. \tag{84}$$

$$[\mathbf{B}] = 1 \text{ Тл}.$$

Магнитная индукция и напряжённость магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}. \tag{85}$$

$$[\mathbf{H}] = 1 \text{ А/м}.$$

$$\mathbf{dH}(\mathbf{r}) = \frac{I(\boldsymbol{\rho})\,[\mathbf{d}\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]}{4\pi\,|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3}. \tag{86}$$

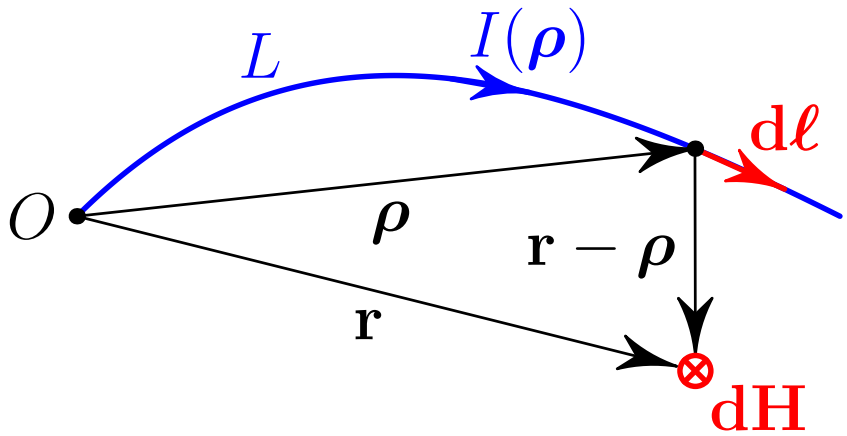


Рис. 4: Закон Био — Савара — Лапласа

$$\mathbf{H} = \oint_L \frac{I(\boldsymbol{\rho})\,[\mathbf{d}\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]}{4\pi\,|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3}. \tag{87}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathbf{d}\ell = I. \tag{88}$$

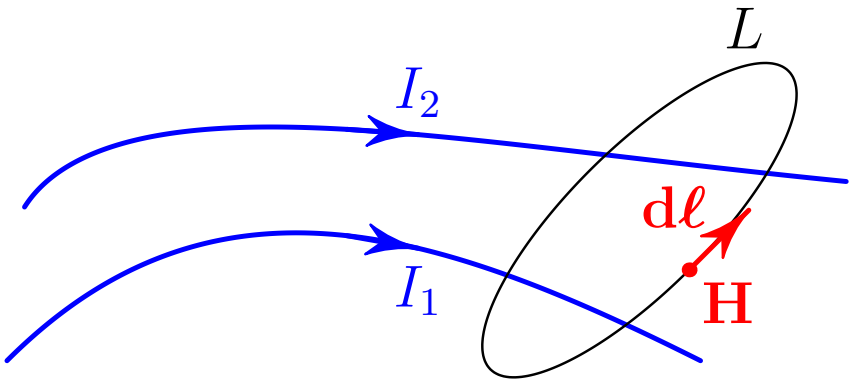


Рис. 5: Циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathbf{d}\ell = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{ds} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds}. \tag{89}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{90}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{91}$$

Приложение. Основы электродинамики

Граничные условия для магнитного поля

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \tag{92}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S, \tag{93}$$

$$[\mathbf{J}_S] = 1 \text{ А/м}.$$

Уравнения статики в дифференциальной форме

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{94}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \tag{95}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \tag{96}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{97}$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q\left(\mathbf{E} + [\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}]\right). \tag{98}$$

Приложение. Основы электродинамики

Переход к динамике

$$\text{div}\,(95)\ :\quad \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H}=\nabla\cdot\mathbf{J}\underset{(83)}{=}-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

Приложение. Основы электродинамики

Переход к динамике

$$\text{div}\,(95)\ :\quad \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H}=\nabla\cdot\mathbf{J}\underset{(83)}{=}-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}\neq 0\quad ???$$

$$\text{div}\,(95)\ :\quad \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H}=\nabla\cdot\mathbf{J}\underset{(83)}{=}-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}\neq 0\quad ???$$

Закон Ампера — Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{99}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\underset{(83)}{=}-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}+\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{D}}{\partial t}\underset{(96)}{=}-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}+\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=0. \tag{100}$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds}. \tag{101}$$

ЭДС — Электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{102}$$

$$-\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \quad \Longrightarrow \quad -\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds}. \tag{103}$$

Закон Фарадея

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{104}$$

Приложение. Основы электродинамики

Уравнения Максвелла — Хэвисайда

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{105}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{106}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \tag{107}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{108}$$