Теория дифракции

Лекции 5 – 8. Ограниченные волновые пучки и дифракция

П. А. Макаров





9 ноября, 8 и 22 декабря 2026 г.

Содержание

1. Метод Кирхгофа

2. Угловой спектр плоских волн

3. Приближённые методы расчёта дифрагированного поля с помощью интеграла Кирхгофа

4. Параболическое уравнение в теории дифракции. Квазиоптическое приближение

5. Отражение ограниченных волновых пучков

6. Обобщение метода Кирхгофа для векторных полей. Метод Кирхгофа — Котлера

7. Контрольные вопросы и задания

8. Источники

Метод Кирхгофа решения дифакционных задач состоит в использовании интегральной теоремы, согласно которой значение функции u, являющейся решением скалярного уравнения Гельмгольца, в произвольной точке $M(x, y, z)$, находящейся внутри замкнутого объёма, выражается через значение функции u и её первой производной на поверхности, ограничивающей данный объём.

Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса — Френеля, основная идея которого состоит в том, что волновое возмущение в некоторой точке M есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками. Эти источники расположены на поверхности, проходящей между точкой M и реальным источником волн.

Пусть $u(M)$ и $G(M)$ — комплексные функции координат точки M, имеющие непрерывные первые и вторые частные производные как внутри объёма V, так и на поверхности S, ограничивающей объём V. Тогда, согласно теореме Грина (вторая формула Грина) [1]

$$\int\limits_V (G\Delta u - u\Delta G)\,\mathrm{d}V = \int\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \qquad (1)$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по направлению внешней нормали к объёму V (рис. 1).

Метод Кирхгофа

Однородное уравнение Гельмгольца для функции u

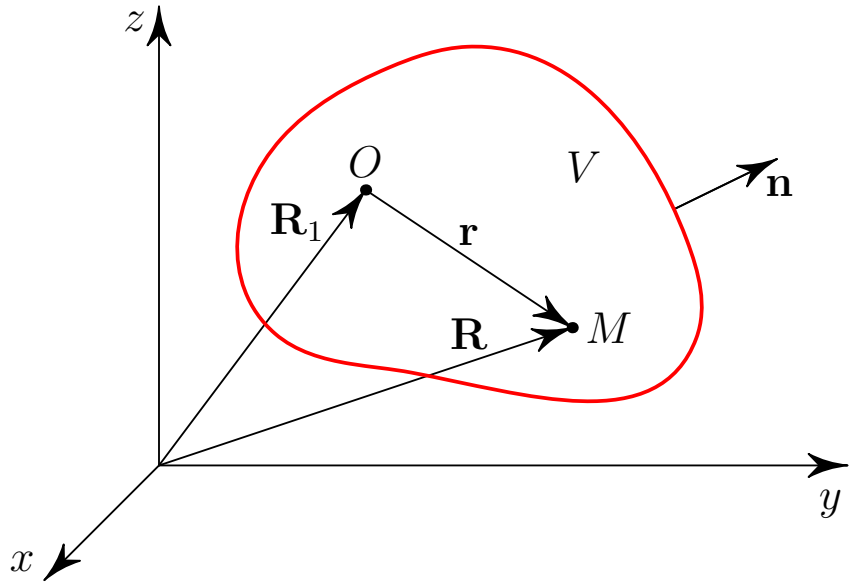


Рис. 1: К выводу интегральной теоремы Кирхгофа — Гельмгольца

Пусть функция u является комплексной амплитудой волнового поля и удовлетворяет внутри объёма V однородному уравнению Гельмгольца (считаем, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$):

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{2}$$

В качестве функции G выберем функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|). \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки M, $\mathbf{R}_1$ — радиус-вектор текущей точки O объёма V (рис. 1). Важным решением уравнения (3) является функция

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \text{где} \quad r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|,$$

которая описывает сферическую волну единичной амплитуды. Она называется *функцией точечного источника* или *функцией Грина для свободного пространства.*

Определяя Δu и ΔG из (2) и (3) и подставляя в (1) получим

$$4\pi \int\limits_V u(\mathbf{R})\delta(|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|)\,\mathrm{d}V_1 = \int\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

или

$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}S. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *интегральной теоремой Кирхгофа — Гельмгольца.*

Определяя Δu и ΔG из (2) и (3) и подставляя в (1) получим

$$4\pi \int\limits_V u(\mathbf{R})\delta(|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|)\,\mathrm{d}V_1 = \int\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

или

$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}S. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *интегральной теоремой Кирхгофа — Гельмгольца.*

Используем формулу (4) для определения поля волны, прошедшей через экран с отверстием. Пусть волна падает на экран слева, а поле требуется определить в произвольной точке M, расположенной справа от него (рис. 2).

Метод Кирхгофа

Выбор поверхности интегрирования S

Чтобы применить к этой задаче формулу (4), необходимо выбрать поверхность интегрирования. Будем считать, что поверхность S состоит из плоской поверхности S_1 экрана с отверстием и сферической поверхности S_2 с центром в точке M, опирающейся на плоскость S_1.

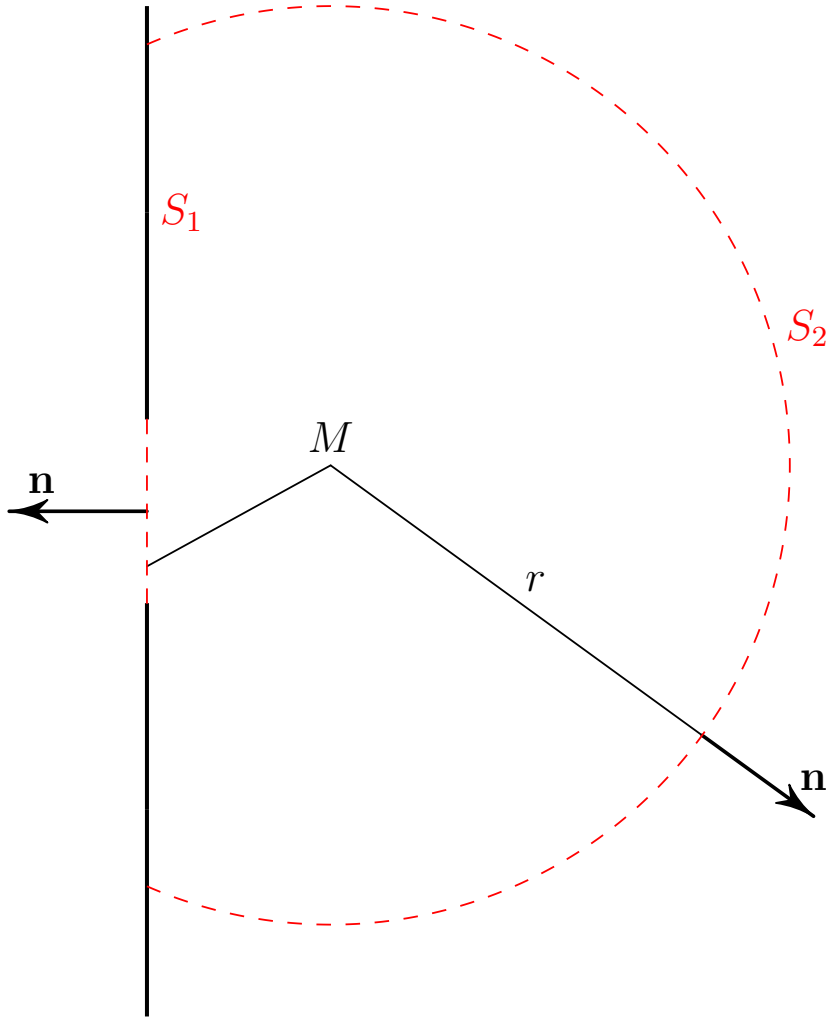


Рис. 2: К выводу условия излучения

Метод Кирхгофа

Интеграл по сферической поверхности S_2

В этом случае направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r} = \left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r} \approx ik\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Если радиус сферической поверхности взять очень большим (в пределе можно считать $r \to \infty$), то из физических соображений ясно, что интеграл по поверхности S_2 должен давать малый вклад в поле в точке M. Однако для гармонических полей ($\sim e^{-i\omega t}$) обращение интеграла по S_2 в нуль происходит только в том случае, если на функцию u наложить условия, определяющие её поведение при $r \to \infty$. Потребуем, чтобы

$$\lim_{r\to\infty} \int_{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)\frac{e^{ikr}}{r} r^2 \,\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{5}$$

Здесь Ω — телесный угол с вершиной в точке M.

Интеграл (5) будет стремиться к нулю при $r \to \infty$, если функция u будет удовлетворять условию

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0. \tag{6}$$

Условие (6) называется *условием излучения Зоммерфельда.* Ему удовлетворяет функция $u = e^{ikr}/r$, которая при зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$ определяет расходящуюся сферическую волну. Так как возмущение, идущее от отверстия в экране, всегда представляет собой комбинацию сферических волн, то условие (6) оказывается выполненным. Интеграл по S_2 обращается в нуль, и поле в точке M определяется только значением поля и его производной в отверстии и на теневой стороне экрана.

Однако пока не решена точно соответствующая граничная задача, значения u и $\partial u/\partial n$ на S не известны. Поэтому без дополнительных исследований задача может быть решена лишь приближённо при определённых предположениях о значениях u и $\partial u/\partial n$ на теневой стороне экрана.

Приближённые граничные условия Кирхгофа соответствуют следующим предположениям:

1. Значения u и $\partial u/\partial n$ равны нулю всюду, за исключением отверстий.
2. Значения u и $\partial u/\partial n$ внутри отверстия такие же, какими бы они были, если бы экран отсутствовал.

Метод Кирхгофа

Замечания о точности граничных условий Кирхгофа

Несмотря на математическую нестрогость указанных допущений, расчёт интенсивности и фазы дифрагированной волны в том случае, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны, даёт результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом. Математическая нестрогость приближённых граничных условий Кирхгофа связана с требованием одновременного обращения в нуль как самой функции u, так и её производной по нормали к поверхности на теневой стороне экрана. При таких граничных условиях функция u, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, должна обращаться в нуль всюду за экраном. Поэтому функция u, вычисленная по формуле (4) с граничными условиями 1 и 2, строго говоря, не описывает поля вблизи экрана и в плоскости отверстия. Однако поскольку значения функции u и её производной $\partial u/\partial n$ на теневой стороне экрана очень малы и могут быть измерены только в непосредственной близости от отверстия (это соображение тем точнее, чем больше отверстие и меньше длина волны) и отличие u и $\partial u/\partial n$ внутри отверстия от поля падающей волны в отсутствие экрана также очень мало, то расчёты по формуле (4) с граничными условиями 1 и 2 часто дают хорошую точность.

Метод Кирхгофа

Геометрия задачи

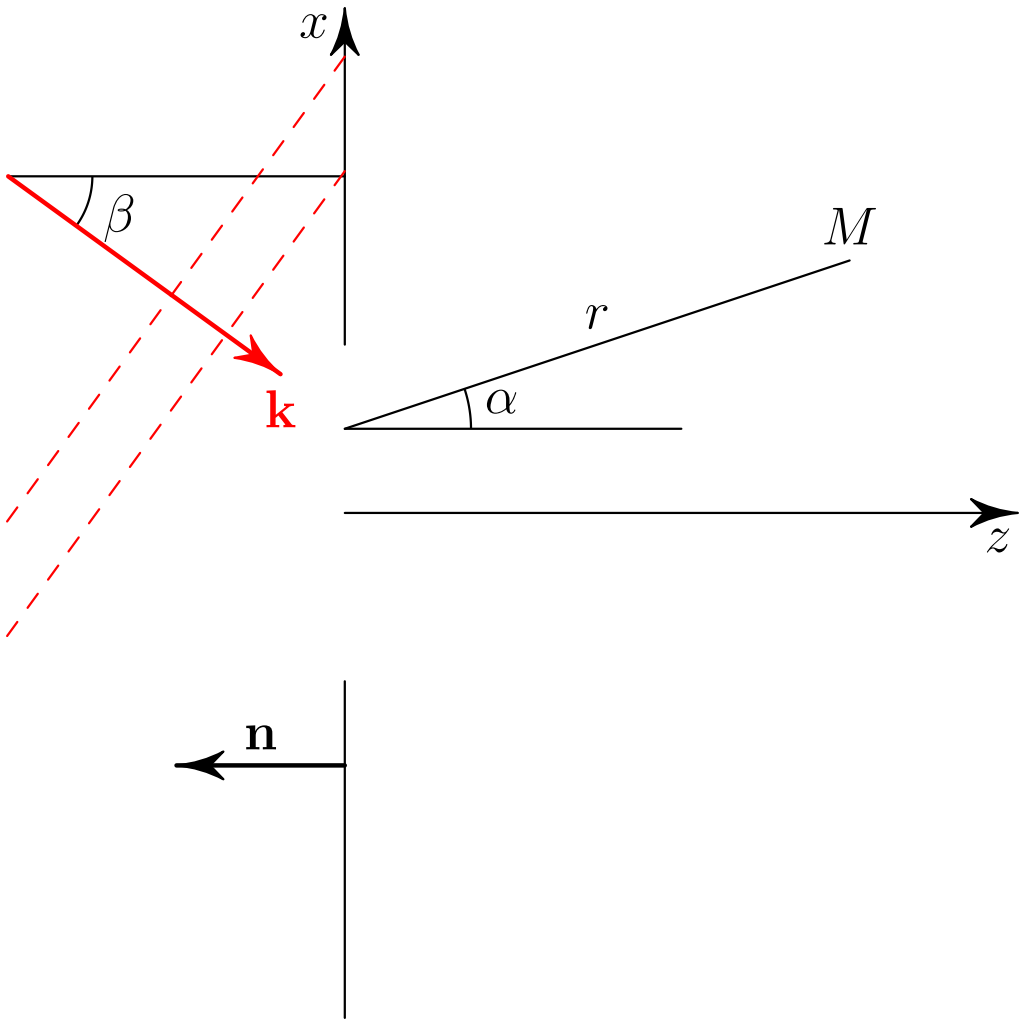


Рис. 3: Дифракция плоской волны на плоском непрозрачном экране

Метод Кирхгофа

К вычислению интеграла по поверхности S_1

Если на плоский экран с отверстием Σ падает квазиплоская волна $u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r})e^{i\mathbf{kr}}$, то, учитывая геометрию дифракционной задачи, изображённую на рис. 3, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z}{r} = -\cos\alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -\frac{\partial u}{\partial z} \approx -ik_z u = -iku\cos\beta, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} = -\left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\cos\alpha. \tag{8}$$

Здесь $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$, где ξ, η — текущие координаты в плоскости отверстия. Подставляя (7) и (8) в (4) и считая, что $kr \gg 1$, получим

$$u(\mathbf{R}) = \frac{k}{4\pi i}\int\limits_{\Sigma}(\cos\beta - \cos\alpha)\, u(\xi,\eta)\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{9}$$

Метод Кирхгофа

Метод Зоммерфельда выбора функции G

Математическую нестрогость метода Кирхгофа можно устранить, определив иначе вспомогательную функцию G. Метод выбора функции Грина, предложенный Зоммерфельдом, исключает необходимость одновременного задания граничных условий для поля и его производной по нормали. Функция Грина для уравнения Гельмгольца должна быть решением уравнения (3), удовлетворять условию излучения и, кроме того, удовлетворять одному из граничных условий

$$1)\ G_1\big|_S = 0, \quad 2)\ \left.\frac{\partial G_2}{\partial n}\right|_S = 0,$$

т. е. или сама функция должна обращаться в нуль на поверхности S, или должна обращаться в нуль её производная по нормали. В первом случае функция G_1 называется *функцией Грина,* во втором — *второй функцией Грина* или *характеристической функцией Неймана* (G_2).

Метод Кирхгофа

О функциях Грина G_1 и G_2

- Выбор функции Грина G_1 обращает в (4) в нуль член, содержащий $\partial u/\partial n$. При этом на поверхности S достаточно знать лишь саму функцию u.
- Если выбрать вторую функцию Грина, то в нуль обращается член, содержащий u, и достаточно на S знать $\partial u/\partial n$.

Однако построение функций Грина, удовлетворяющих ограниченным условиям 1 или 2, известно лишь для задач с достаточно простой геометрией. Вид функций Грина определяется видом поверхности S и свойствами среды и не зависит от положения источника излучения и от поля, создаваемого им на экране. Поэтому можно говорить о функции Грина для полупространства, сферы и т. д.

Метод Кирхгофа

О выборе функции Грина для плоского экрана. Начало

Для плоского экрана в качестве функции Грина можно взять разность полей двух точечных источников: источника, расположенного в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(x, y, -z)$, являющейся зеркальным изображением точки M в плоскости экрана (рис. 4).

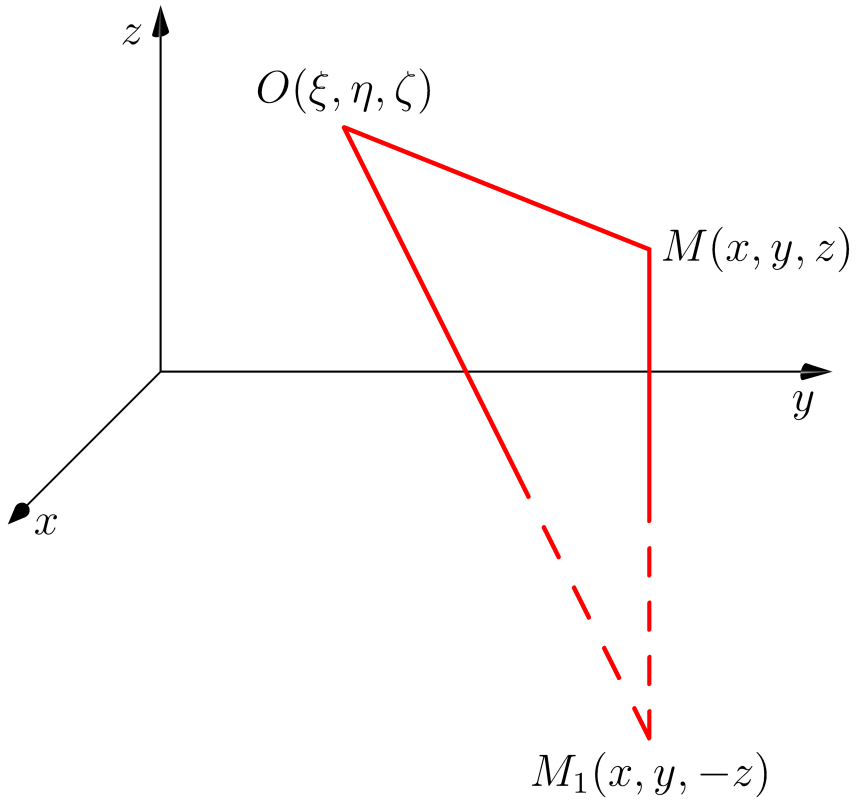


Рис. 4: К определению функции Грина для полупространства $z > 0$

Метод Кирхгофа

О выборе функции Грина для плоского экрана. Продолжение

$$G_1 = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1},$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2},$$

В плоскости экрана при $\zeta = 0$

$$G_1 = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial n} = 2\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} = -2\,\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Если в качестве функции Грина выбрать

$$G_2 = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr_1}}{r_1},$$

то при $\zeta = 0$

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0, \quad G_2 = 2\,\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Подставляя функцию G_1 в интеграл (4), получим ($kr \gg 1$)

$$u(\mathbf{R}) = \frac{k}{2\pi i} \iint\limits_{\Sigma} u(\xi, \eta) \frac{z}{r} \frac{e^{ikr}}{r} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta. \tag{10}$$

Если в (4) подставить функцию G_2, то

$$u(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left. \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} \frac{e^{ikr}}{r} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta. \tag{11}$$

Альтернативная схема решения

Вместо того чтобы искать решение дифракционной задачи в форме (4), выбрав соответствующим образом функцию Грина, можно использовать метод разложения поля в плоскости экрана по плоским волнам.

Постановка задачи

Рассмотрим монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении оси z и проходящую через отверстие в непрозрачном экране, расположенном в плоскости $z = 0$. Комплексная амплитуда волны в плоскости $z = 0$ описывается функцией $u_0(x, y, 0)$. Необходимо определить поле в произвольной точке $M(\mathbf{R})$ за экраном.

Угловой спектр плоских волн

Двумерное фурье-преобразование функции $u_0(x, y, 0)$

Прямое преобразование

$$u_0(x, y, 0) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0(k_x, k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y. \qquad (12)$$

Обратное преобразование

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x, y, 0)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad (13)$$

Функция $F_0(k_x, k_y)$ называется угловым (пространственным) спектром функции $u_0(x, y, 0)$.

Угловой спектр плоских волн

Пространственные частоты

Вместо переменных $k_x = k\cos\alpha$, $k_y = k\cos\beta$, $k_z = k\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к фронту плоской волны, можно ввести новые переменные $f_x = k_x/2\pi = \cos\alpha/\lambda$, $f_y = k_y/2\pi = \cos\beta/\lambda$, называемые *пространственными частотами*. В этих обозначениях

$$u_0(x, y, 0) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0(f_x, f_y)\, e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}\, \mathrm{d}f_x\, \mathrm{d}f_y, \qquad (12')$$

$$F_0(f_x, f_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x, y, 0)\, e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad (13')$$

Следовательно, выражение (12) представляет разложение комплексной амплитуды волнового поля в плоскости $z = 0$ в угловой спектр плоских волн.

Угловой спектр плоских волн

Угловой спектр $F(k_x, k_y, z)$ в любой плоскости, параллельной экрану

Если бы угловой спектр был известен в любой плоскости, параллельной экрану, т. е. при любом z, то функция $u(\mathbf{r})$ определилась бы выражением

$$u(\mathbf{R}) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y, z)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y. \tag{14}$$

Поскольку функция $u(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (среду считаем однородной)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{15}$$

то, подставляя (14) в уравнение (15), получим дифференциальное уравнение для функции $F(k_x, k_y, z)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2)F = 0. \tag{16}$$

Угловой спектр плоских волн

Динамика углового спектра $F(k_x, k_y, z)$ при изменении z

Решая уравнение (16) при условии $F(k_x, k_y, 0) = F_0(k_x, k_y)$, найдём частное решение, соответствующее волне, распространяющейся в положительном направлении оси z

$$F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y)\, e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \qquad (17)$$

Угловой спектр, по мере удаления точки наблюдения от плоскости экрана, изменяется.

- При $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ это изменение связано со сдвигом фаз между различными спектральными компонентами (плоскими волнами, распространяющимися под разными углами к оси z).
- При $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ выражение (17) описывает плоские неоднородные волны, амплитуды которых экспоненциально убывают по мере удаления от плоскости $z = 0$.
- В предельном случае, когда $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, плоские волны распространяются в направлениях, перпендикулярных оси z и не переносят энергию вдоль оси z.

Угловой спектр плоских волн

Искажение углового спектра и функция пропускания экрана

Искажение начального углового спектра зависит от области значений k_x и k_y, играющей существенную роль в угловом спектре, т. е. от ширины углового спектра $F_0(k_x, k_y)$ в плоскости $z = 0$.

Найдём, как связан угловой спектр $F_0(k_x, k_y)$ со спектром падающей на экран волны и с размерами и формой отверстия.

Будем характеризовать экран функцией пропускания $g(x, y)$. Например, функция пропускания для непрозрачного экрана с отверстием имеет вид

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ — в пределах отверстия,} \\ 0 \text{ — вне отверстия.} \end{cases}$$

Угловой спектр плоских волн

Поле и его угловой спектр за экраном

Если обозначить поле падающей волны в плоскости $z = 0$ как $u_{\text{п}}(x, y)$, то поле за экраном определится по формуле

$$u_0(x, y, 0) = u_{\text{п}}(x, y)\, g(x, y), \tag{18}$$

а угловой спектр поля за экраном будет равен свёртке углового спектра падающего излучения и спектра коэффициента пропускания экрана

$$F_0(k_x, k_y) = F_{\text{п}}(k_x, k_y) * \Phi(k_x, k_y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta)\, \Phi(k_x - \xi, k_y - \eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{19}$$

Например, если на экран, нормально к нему, падает плоская волна единичной амплитуды, угловой спектр которой $F_{\text{п}}(k_x, k_y) = \delta(k_x)\, \delta(k_y)$, (где $\delta(k_x)$ — дельта-функция), то

$$F_0(k_x, k_y) = \delta(k_x)\, \delta(k_y) * \Phi(k_x, k_y) = \Phi(k_x, k_y).$$

Таким образом, при прохождении плоской волны через экран с отверстием её спектр уширяется.

Угловой спектр плоских волн

Нормальное падение плоской волны на щель ширины b с краями $\parallel Oy$

Фурье-образ функции пропускания экрана есть

$$\Phi(k_x) = F_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_x x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(k_x b/2)}{\pi k_x}. \tag{20}$$

Ширина щели b должна быть больше длины волны падающего излучения, иначе понятие пучка теряет смысл. Ширину углового спектра можно оценить по величине k_x, при которой функция $\Phi(k_x)$ обращается в нуль. Из условия

$$\sin\frac{k_x b}{2} = 0$$

находим

$$k_x = \frac{2\pi}{b} \quad \text{или} \quad \sin\theta = \frac{\lambda}{b}, \tag{21}$$

где θ — угол наклона вектора $\mathbf{k}$ к оси z. Существенное значение в спектре прошедшего излучения имеют спектральные компоненты, амплитуда которых $F_0(k_x)$ не слишком мала, т. е. $k_x/k = \sin\theta \leqslant \lambda/b$. Таким образом, ширина углового спектра определяется отношением длины падающей волны к размерам отверстия: чем меньше отношение λ/b, тем у́же угловой спектр.

Угловой спектр плоских волн

Наклонное падение плоской волны под углом θ_0 к оси z на ту же щель

$$F_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-b/2}^{b/2} e^{-i(k_x - k_{x0})x}\, \mathrm{d}x = \frac{\sin((k_x - k_{x0})b/2)}{\pi(k_x - k_{x0})}. \qquad (22)$$

где $k_{x0} = k \sin\theta_0$. Ширина углового спектра пучка при $z = 0$ (в плоскости экрана) в этом случае может быть определена из условия

$$\frac{b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0) = 1.$$

Если щель достаточно широкая, т. е. $\lambda/b \ll 1$, то, используя формулу для разности синусов двух углов и учитывая, что $\theta - \theta_0$ — малая величина, получим

$$\theta - \theta_0 = \frac{\lambda}{b\cos\theta_0}. \qquad (23)$$

Ширина углового спектра излучения из отверстия в экране зависит не только от отношения λ/b, но и от направления распространения волны, падающей на экран. В точной теории дифракции на щели вводится ограничение на угол падения волны на щель θ_0. Только для не слишком больших углов падения допустимо пользоваться приближёнными граничными условиями Кирхгофа.

Угловой спектр плоских волн

Аналогия между угловым и частотным спектрами

Можно провести аналогию между угловым спектром пространственно-ограниченного волнового возмущения и частотным спектром временно́го импульса конечной длительности T [2, Гл. II, § 8]. Если временной импульс при $z = 0$ описывается функцией $u(0, t) = A(0, t)\, e^{-i\omega_0 t}$, где

$$A(0, t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| < T/2, \\ 0 \text{ при } |t| > T/2, \end{cases}$$

то его частотный спектр равен

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(0, t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t}\, \mathrm{d}t = \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\, T/2]}{\pi(\omega - \omega_0)}.$$

Ширина частотного спектра $\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \dfrac{\tau}{T}$, где $\tau = 2\pi/\omega_0$.

Таким образом, волну, прошедшую через отверстие в непрозрачном экране, можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся под разными углами к направлению распространения волны, падающей на экран. Ширина пучка, представляющего поле за экраном, по мере распространения увеличивается, поскольку направления распространения плоских волн, образующих пучок, составляют некоторый угол с осью пучка — пучок расплывается. При этом распределение амплитуды в поперечном сечении пучка изменяется. Если пренебречь дифракционным расплыванием пучка, (т. е. изменением его углового спектра), то траекторию пучка лучей и изменение амплитуды вдоль траектории можно определить методами геометрической оптики [2, Гл. VII, § 2].

Воспользуемся интегралом Кирхгофа в виде (10) для определения поля волны, прошедшей через плоский непрозрачный экран с отверстием произвольной формы. Примем, что плоскость экрана совпадает с плоскостью $z = 0$.

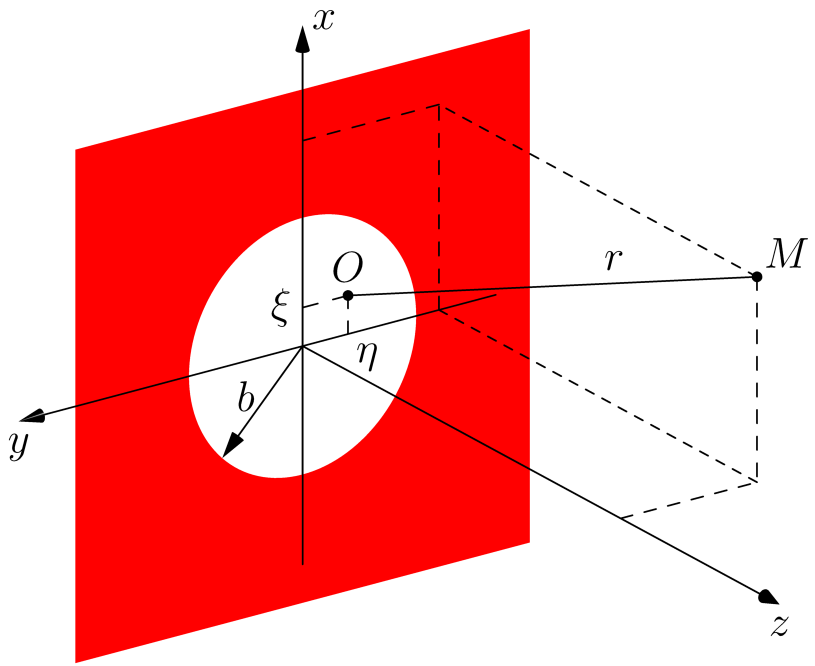


Рис. 5: К расчёту дифрагированного поля с помощью интеграла Кирхгофа

Интеграл (10) описывает поле волны, когда точка $M(x, y, z)$ удалена от экрана на расстояние, значительно превышающее длину волны, т. е. выполняется условие $kr \gg 1$, где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$. Примем, что функция $u(\xi, \eta)$, описывающая поле падающей на экран волны, меняется достаточно медленно в пределах отверстия. Тогда подынтегральное выражение в интеграле (10) представляет собой произведение двух функций: функции $zu(\xi, \eta)/r^2$, которая при небольшом перемещении точки $O(\xi, \eta, 0)$ в плоскости отверстия изменяется медленно, и функции e^{ikr}, испытывающей быстрые осцилляции при смещении этой точки.

Для вычисления интегралов такого типа используется приближённый метод, называемый *методом стационарной фазы.*

Быстрые осцилляции экспоненциальной функции приводят к тому, что интеграл есть всюду малая величина, кроме той области, в которой показатель экспоненты имеет стационарное значение, т. е. не изменяется в первом порядке изменения kr. Если имеется такая точка стационарности, в которой фаза $\varphi(\xi, \eta)$ осциллирующей функции имеет максимум или минимум, то область в окрестности этой точки даёт наибольший вклад в интеграл. Поэтому находится точка или точки стационарности фазы осциллирующей функции и $\varphi(\xi, \eta)$ разлагается в ряд в окрестности этой точки до членов второго или третьего порядка малости (если член второго порядка малости обращается в нуль). Медленно изменяющиеся функции определяются в точке стационарности и выносятся из-под знака интеграла. Остающиеся интегралы сводятся к интегралам Френеля вида

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^t \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\varkappa^2\right) \mathrm{d}\varkappa.$$

Интегралы Френеля уже при значениях $t \sim 10$ отличаются от значений интеграла при $t \to \infty$ менее чем на 10%.

$$\varphi(\xi,\eta) = ik\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Найдём точку стационарности:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -ik\frac{x-\xi}{r} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -ik\frac{y-\eta}{r} = 0.$$

Разложение фазы φ в ряд в окрестности точки стационарности $\xi = x$, $\eta = y$ имеет вид

$$\varphi(\xi,\eta) \approx ik\left(z + \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^2}{z} + \frac{1}{2}\frac{(y-\eta)^2}{z} + \dots\right). \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (10) и вынося из-под интеграла медленно изменяющиеся функции, определённые в точке стационарности, получим

$$u(x,y,z) = \frac{u_0(x,y)}{i\lambda z}\, e^{ikz} \iint\limits_{\Sigma} \exp\left[ik\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2z}\right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \qquad (25)$$

Найдём на плоскости $z = 0$ границы областей, окружающих точку стационарности $\xi = x$, $\eta = y$, в которых фаза подынтегральной функции изменяется в пределах $\pi/2$:

$$\pi \frac{(x-\xi)^2}{\lambda z} + \pi \frac{(y-\eta)^2}{\lambda z} = m \frac{\pi}{2},$$

или

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R_m^2, \tag{26}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Мы получили семейство окружностей с центрами в точке $\xi = x$, $\eta = y$ и радиусами $R_m = \sqrt{m\lambda z/2}$.

Таким образом, плоскость $z = 0$ разбивается окружностями на концентрические кольца, называемые *зонами Френеля.*

При переходе от одной зоны к другой действительная или мнимая часть подынтегрального выражения в (25) меняет знак.

В силу этого, интеграл, взятый по конечному числу зон Френеля можно представить в виде знакопеременного ряда, m-й член которого определяет вклад m-й зоны Френеля.

Данный ряд быстро сходится. Физически это значит, что можно выделить область поверхности экрана, которая играет наиболее существенную роль в процессе формирования дифрагированного поля.

Эта область примерно совпадает с размером первой зоны Френеля.

Если точка стационарности лежит в области отверстия (точка наблюдения M расположена вблизи оси z) и несколько первых зон Френеля также лежат в плоскости отверстия, то максимальные значения переменных интегрирования $\xi_{\max}$ и $\eta_{\max}$, которые определяются размерами отверстия в экране, есть величины порядка b, т. е.

$$\xi_{\max}^2 \sim b^2 \gg \lambda z, \quad \eta_{\max}^2 \sim b^2 \gg \lambda z.$$

При этом интеграл (25) по площади отверстия можно заменить интегралом в бесконечных пределах

$$u(x,y,z) = \frac{u_0(x,y)}{i\lambda z}\, e^{ikz} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\!\int \exp\left[ik\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2z}\right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{27}$$

Сделав замену переменных:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{2z}(x-\xi)^2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{2z}(y-\eta)^2},$$

получим

$$u(x,y,z) = \frac{u_0(x,y)}{i\pi}\, e^{ikz} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha^2+\beta^2)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = u_0(x,y)\, e^{ikz}. \quad (28)$$

Формула (28) определяет невозмущённое поле в точке $M(x,y)$. Таким образом, если проекция точки наблюдения M на плоскость экрана лежит внутри отверстия и существенная область формирования дифракционного поля, совпадающая с первой зоной Френеля, не пересекает края отверстия, то поле в точке M оказывается невозмущённым.

Действие экрана можно характеризовать отношением площади первой зоны Френеля к величине апертуры

$$D = \frac{\lambda z}{\pi b^2}. \tag{29}$$

Величина D, называемая *волновым параметром* (сравните эту величину с числом Френеля F, определённым во введении), играет большую роль в задачах дифракции.

Приближённые методы расчёта дифрагированного поля

Замечания к случаю $D \ll 1$

Если $D \ll 1$, то экран не влияет на величину поля. Конечно, это утверждение справедливо в том случае, если точка стационарности лежит внутри отверстия, т. е. точки наблюдения расположены вблизи оси z. При увеличении x или y точка стационарности перемещается к краю отверстия и существенная область начинает пересекать его край. Поле в точке M становится возмущённым. В этом случае замена конечных пределов интегрирования в (25) бесконечными невозможна, а интегралы в (25) сводятся к известным интегралам Френеля, с помощью которых вычисляются распределения интенсивности у края отверстия, соответствующей формы (дифракция на щели, на отверстии прямоугольной формы и т. д.).

Вывод (28) о том, что при $D \ll 1$ экран не оказывает влияния на дифрагированную волну, справедлив лишь для достаточно плавных распределений поля $u(\xi, \eta)$ на отверстии. В противном случае функцию u нельзя выносить из-под интеграла (27) в точке стационарности, и метод не даёт правильных результатов. Так, например, когда $u(\xi, \eta)$ постоянна на отверстии и равна нулю вне его, начинают сильно сказываться краевые эффекты. Поле дифрагированной волны, даже на оси ($x = y = 0$), приобретает сложную осциллирующую структуру.

При удалении точки M от плоскости экрана размер первой зоны Френеля становится соизмеримым с размерами отверстия.

В этом случае метод стационарной фазы, использованный при вычислении интеграла (10), неприменим, поскольку при условии $D \sim 1$ предположение о медленности изменения функции $u(\xi, \eta)$ в пределах существенной области нарушается — при переходе от отверстия к теневой стороне экрана функция $u(\xi, \eta)$ изменяется, согласно граничным условиям Кирхгофа, от конечного значения до нуля.

Будем рассматривать поле в точках, лежащих вблизи оси z, расстояние которых до экрана значительно больше размера отверстия, т. е.

$$\frac{|x-\xi|}{z} \ll 1, \quad \frac{|y-\eta|}{z} \ll 1, \tag{30}$$

$$r \approx z + \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{z} + \ldots. \tag{31}$$

Подставляя (31) в интеграл (10) и заменяя в знаменателе подынтегрального выражения r на z, с учётом (30) получим для $u(x,y,z)$ выражение, которое называется приближением Френеля:

$$u(x,y,z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint\limits_{\Sigma} u(\xi,\eta)\,\exp\left[ik\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2z}\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{32}$$

Вынося из-под интеграла (32) члены, не зависящие от ξ и η, и вводя обозначения: $f_x = x/\lambda z$ и $f_y = y/\lambda z$, получим

$$u(x,y,z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda z}\right) \times \\ \times \iint\limits_{\Sigma} u(\xi,\eta) \exp\left(i\pi \frac{\xi^2+\eta^2}{\lambda z}\right) e^{-i2\pi(f_x\xi + f_y\eta)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{33}$$

Сравнивая (33) с (13′), найдём, что интеграл в (33) представляет угловой спектр (или фурье-образ) функции

$$u(\xi,\eta) \exp\left(i\pi \frac{\xi^2+\eta^2}{\lambda z}\right)$$

для пространственных частот f_x и f_y. На расстояниях от экрана, соответствующих значениям волнового параметра $D \sim 1$, поле определяется интегралом (33). Эта область называется *областью дифракции Френеля.*

Приближённые методы расчёта дифрагированного поля

$D \gg 1$ — область дифракции Фраунгофера

При $D \gg 1$ показатель первого экспоненциального множителя в интеграле (33) может принимать только малые значения

$$\pi \frac{\xi_{\max}^2}{\lambda z} \sim \frac{1}{D}, \quad \pi \frac{\eta_{\max}^2}{\lambda z} \sim \frac{1}{D}, \quad \exp\left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z} \right) \approx 1.$$

Область значений $D \gg 1$ называется *областью дифракции Фраунгофера*. В этой области

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right) (2\pi)^2 F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y), \qquad (34)$$

где $F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y)$ — угловой спектр функции $u_0(\xi, \eta)$. Распределение интенсивности в области дифракции Фраунгофера определяется квадратом модуля углового спектра излучения в плоскости экрана

$$|u(x, y, z)|^2 = \frac{(2\pi)^4}{(\lambda z)^2} \left| F_0\left(2\pi \frac{x}{\lambda z}, 2\pi \frac{y}{\lambda z} \right) \right|^2. \qquad (35)$$

Приближённые методы расчёта дифрагированного поля

Прямоугольное отверстие $b_1 \times b_2$ освещённое плоской волной единичной амплитуды

$$F_0\left(2\pi\frac{x}{\lambda z}, 2\pi\frac{y}{\lambda z}\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-b_1/2}^{b_1/2} \exp\left(-ik\frac{x\xi}{z}\right)\mathrm{d}\xi \times$$

$$\times \int\limits_{-b_2/2}^{b_2/2} \exp\left(-ik\frac{y\eta}{z}\right)\mathrm{d}\eta = \frac{b_1 b_2}{(2\pi)^2}\cdot\frac{\sin\left(\pi\dfrac{xb_1}{\lambda z}\right)}{\pi\dfrac{xb_1}{\lambda z}}\cdot\frac{\sin\left(\pi\dfrac{yb_2}{\lambda z}\right)}{\pi\dfrac{yb_2}{\lambda z}}.$$

Интенсивность поля

$$I = \frac{b_1^2 b_2^2}{(\lambda z)^2}\left[\frac{\sin\left(\pi\dfrac{xb_1}{\lambda z}\right)}{\pi\dfrac{xb_1}{\lambda z}}\right]^2\left[\frac{\sin\left(\pi\dfrac{yb_2}{\lambda z}\right)}{\pi\dfrac{yb_2}{\lambda z}}\right]^2. \qquad (36)$$

Угловой спектр:

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{u(\xi, \eta)}_{?!}\, e^{-i(k_x\xi + k_y\eta)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta.$$

Здесь $k_x = \dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot \dfrac{x}{z}$, $k_y = \dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot \dfrac{y}{z}$.

Перейдём к полярным координатам как в плоскости ξ, η, так и в плоскости k_x, k_y:

$$\xi = r\cos\varphi,\ \eta = r\sin\varphi, \quad k_x = q\cos\theta,\ k_y = q\sin\theta,$$

где

$$q = \frac{2\pi}{\lambda z}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\pi}{\lambda z} r. \tag{37}$$

$$F_0(q,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^b r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos(\varphi-\theta)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Интеграл по φ в этой формуле может быть записан через функцию Бесселя нулевого порядка

$$J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos(\varphi-\theta)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Интегрируя по r, получим

$$F_0(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^b r\,J_0(qr)\,\mathrm{d}r = \frac{b}{2\pi q}\,J_1(qb).$$

Учитывая (37) запишем окончательные выражения для углового спектра и распределения интенсивности поля

$$F_0 = \frac{b^2}{2\pi} \cdot \frac{J_1\left(2\pi \dfrac{rb}{\lambda z}\right)}{2\pi \dfrac{rb}{\lambda z}}, \quad I = \frac{(2\pi)^2 b^4}{(\lambda z)^2} \left[\frac{J_1\left(2\pi \dfrac{rb}{\lambda z}\right)}{2\pi \dfrac{rb}{\lambda z}} \right]^2 . \qquad (38)$$

В теории дифракции большое значение имеет принцип Бабине, устанавливающий связь между распределением амплитуд и фаз волн, дифрагировавших на дополнительных экранах.

Дополнительными называются экраны, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого, например, отверстие радиуса b в непрозрачном экране и непрозрачный диск того же радиуса.

Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — комплексные функции, характеризующие волновое поле в точке M в том случае, когда волна проходит только через один из экранов. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$u_1(M) + u_2(M) = u(M),$$

где $u(M)$ — невозмущённое волновое поле в точке M.

Рассмотрим, как распространяется волновой пучок с узким угловым спектром. Для этого предположим, что функция $F_0(k_x, k_y)$ заметно отличается от нуля лишь при $|k_x| \ll k$, $|k_y| \ll k$. Как было показано в п. 2, малость поперечных компонент k_x, k_y волнового вектора по сравнению с его величиной k означает, что характерная ширина пучка значительно больше длины волны $\lambda = 2\pi/k$. В этом случае в экспоненте (17) выражение $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ можно разложить в ряд, сохранив лишь квадратичные по k_x, k_y члены. Тогда (17) примет вид

$$F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y)\, e^{ikz} \exp\left[-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right]. \qquad (39)$$

Согласно (14) при $z \neq 0$ пучок будет описываться функцией

$$u(x,y,z) = e^{ikz} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0(k_x,k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)} \times \\ \times \exp\left[-i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k} z\right] \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y = e^{ikz}\, A(x,y,z). \tag{40}$$

где

$$F_0(k_x,k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,\eta,0)\, e^{-i(k_x\xi + k_y\eta)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta.$$

Подставив последнее в (40), вычислим интеграл по $\mathrm{d}k_x$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ik_x(x-\xi) - i\frac{k_x^2}{2k}z\right]\mathrm{d}k_x = \sqrt{\frac{\pi k}{z}}(1-i)\exp\left[\frac{ik(x-\xi)^2}{2z}\right],$$

и аналогичный интеграл по $\mathrm{d}k_y$. В результате для амплитуды волны получим (ср. с (25))

$$A(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi, y-\eta, z)\, A(\xi,\eta,z=0)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \qquad (41)$$

где

$$G = \frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4\mathcal{D}z}\right]}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}z}} \cdot \frac{\exp\left[-\dfrac{(y-\eta)^2}{4\mathcal{D}z}\right]}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}z}}, \quad \mathcal{D} = -\frac{1}{2ik}.$$

Параболическое уравнение в теории дифракции

Интеграл (41) как решение параболического уравнения

Анализ структуры (41) показывает, что это выражение есть точное решение параболического уравнения с мнимым коэффициентом диффузии $\mathcal{D} = i/2k$:

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_\perp A = 0. \tag{42}$$

Здесь $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа по поперечным координатам, G — функция Грина для уравнения (42).

В соответствии с уравнением (42) по мере распространения волны происходит “диффузия” её амплитуды в поперечном направлении — пучок из-за дифракции расширяется. Этот процесс аналогичен дисперсионному “расплыванию” во времени волнового пакета [2, Гл. II, § 8].

Параболическое уравнение в теории дифракции

Другой способ вывода параболического уравнения (42) теории дифракции

Проанализируем (40). Т. к. k_x/k, k_y/k — малые величины, допустим, порядка $\sqrt{\mu}$ (μ — некоторый малый параметр), "быстрота" изменения различных сомножителей в (40) неодинакова. Наряду с осцилляциями, описываемыми экспонентой e^{ikz}, (40) содержит "медленные" функции

$$\exp[i(k_x x + k_y y)], \quad \exp\left[-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right]. \tag{43}$$

Медленность изменения с координатами x, y первой экспоненты (43) (по отношению к e^{ikz}) порядка k_x/k, $k_y/k \sim \sqrt{\mu}$, а второй экспоненты с координатой z — порядка k_x^2/k^2, $k_y^2/k^2 \sim \mu$. Пользуясь этим, будем искать решение уравнения Гельмгольца (15) в виде:

$$u(x, y, z) = A(x' = \sqrt{\mu}x, y' = \sqrt{\mu}y, z' = \mu z)\, e^{ikz}. \tag{44}$$

Дифференцируя, получаем

$$\left[\Delta u + k^2 u\right] = \mu\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} + \mu\frac{\partial^2 A}{\partial y'^2} + \mu^2\frac{\partial^2 A}{\partial z'^2} + \mu 2ik\frac{\partial A}{\partial z'} - k^2 A + k^2 A = 0.$$

Слагаемые нулевого порядка малости по μ взаимно уничтожаются, а членом порядка μ^2 мы пренебрегаем. Оставшиеся члены имеют один и тот же порядок малости μ — они и образуют параболическое уравнение (42).

Параболическое уравнение в теории дифракции

К определению поля волновых пучков в неоднородных средах

Изложенный метод часто применяется для определения поля волновых пучков в неоднородных средах, когда $k = k(x, y, z)$.

В этих случаях вводятся координаты, одна из которых направлена вдоль траектории лучей, получаемых при решении задачи в приближении геометрической оптики, а две другие лежат на поверхности фазового фронта. Волновой пучок описывается функцией

$$u(\mathbf{r}, t) = A\left(\mu(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\ell}), \sqrt{\mu}[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\ell}]\right) e^{i\mathbf{kr}}, \tag{45}$$

где $\boldsymbol{\ell}$ — единичный вектор, касательный к лучу, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки траектории луча. Функция A удовлетворяет параболическому уравнению

$$2ik(\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\nabla})A + \Delta_{\perp} A = 0. \tag{46}$$

Параболическое уравнение в теории дифракции

К определению поля волновых пучков в неоднородных средах

Изложенный метод часто применяется для определения поля волновых пучков в неоднородных средах, когда $k = k(x, y, z)$.

В этих случаях вводятся координаты, одна из которых направлена вдоль траектории лучей, получаемых при решении задачи в приближении геометрической оптики, а две другие лежат на поверхности фазового фронта. Волновой пучок описывается функцией

$$u(\mathbf{r}, t) = A\left(\mu(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\ell}), \sqrt{\mu}[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\ell}]\right) e^{i\mathbf{kr}}, \tag{45}$$

где $\boldsymbol{\ell}$ — единичный вектор, касательный к лучу, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки траектории луча. Функция A удовлетворяет параболическому уравнению

$$2ik(\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\nabla})A + \Delta_{\perp} A = 0. \tag{46}$$

Перейдём теперь к отысканию некоторых точных решений уравнения (42), имеющих важный физический смысл.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Пример 1. Поле точечного источника

Пусть при $z = 0$ есть точечный источник. Тогда в (41) следует положить

$$A(\xi, \eta, 0) = A(0)\,\delta\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta\left(\frac{\eta}{a}\right).$$

Вычисляя интеграл (41), получаем

$$A = \frac{ka^2}{2\pi i z}\,A(0)\exp\left(ik\,\frac{x^2+y^2}{2z}\right), \quad u = \frac{C}{z}\,\exp\left[ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right], \qquad (47)$$

где C — константа. Решение уравнения Гельмгольца (15) для точечного источника, описывающее сферически расходящуюся волну, имеет вид

$$u = \frac{C}{R}\,e^{ikR}, \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (48)$$

Для точек наблюдения, лежащих вблизи оси, где $x/z \ll 1$, $y/z \ll 1$ из формулы (48) следует

$$R \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z}.$$

Решения (47) и (48) в этом случае совпадают. Т. о., в приближении квазиоптики сферический волновой фронт приближённо заменяется параболическим, но для параксиальной области разница не существенна.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Пример 2. Поле волнового пакета гауссовой формы

Пусть теперь, при $z = 0$ пучок имеет плоский фазовый фронт и гауссово поперечное распределение амплитуды

$$A|_{z=0} = A(0)\, e^{-r^2/a^2}. \tag{49}$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$, a — характерная ширина пучка в плоскости $z = 0$. Подставляя (49) в (41), получаем

$$\begin{aligned} A(r,z) = \frac{kA(0)}{2\pi i z} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}\right) \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right\} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \\ = \frac{A(0)}{1 + i\dfrac{2z}{ka^2}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2\left(1 + i\dfrac{2z}{ka^2}\right)}\right] = A_0\, e^{ik\Psi}. \end{aligned} \tag{50}$$

Действительные амплитуда и фаза в решении (50) равны

$$A_0 = \frac{A(0)}{\sqrt{1+D^2}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2(1+D^2)}\right], \qquad (51)$$
$$k\Psi = \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{D}{1+D^2} - \operatorname{arctg} D.$$

Здесь $D = 2z/ka^2$ — безразмерная дифракционная длина, совпадающая с использованным ранее волновым параметром (29). Как видно из (51), зависимость амплитуды волны от радиуса при $z \neq 0$ по-прежнему имеет вид гауссоиды, но ширина пучка растёт с увеличением расстояния z:

$$a^2(z) = a^2(1+D^2). \qquad (52)$$

Амплитуда волны уменьшается как $A(0)/\sqrt{1+D^2}$.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Кривизна фазового фронта и фаза волнового пакета гауссовой формы

Если в исходном сечении $z = 0$ волна имела плоский фазовый фронт ($\Psi = 0$ при любом r), то при $z \neq 0$ фронт волны уже искривлён. Кривизна фазового фронта R^{-1} изменяется с расстоянием как

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{D}{1+D^2}}. \tag{53}$$

Слагаемое $\operatorname{arctg} D$ в (51) описывает фазовый сдвиг или изменение скорости распространения волны, появляющееся из-за ограниченности пучка в пространстве. На расстояниях $D^2 \gg 1$ первоначально плоская волна превращается в сферически расходящуюся. Её амплитуда убывает как $A_0 \approx ka^2 A(0)/2z$, а ширина пучка растёт по линейному закону $a(z) \approx 2z/ka$. Последнее означает, что волна распространяется в конусе с углом раскрытия, примерно равным $a(z)/z = 2/ka = \lambda/\pi a$.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Изменение при распространении параметров пучка из примера 2

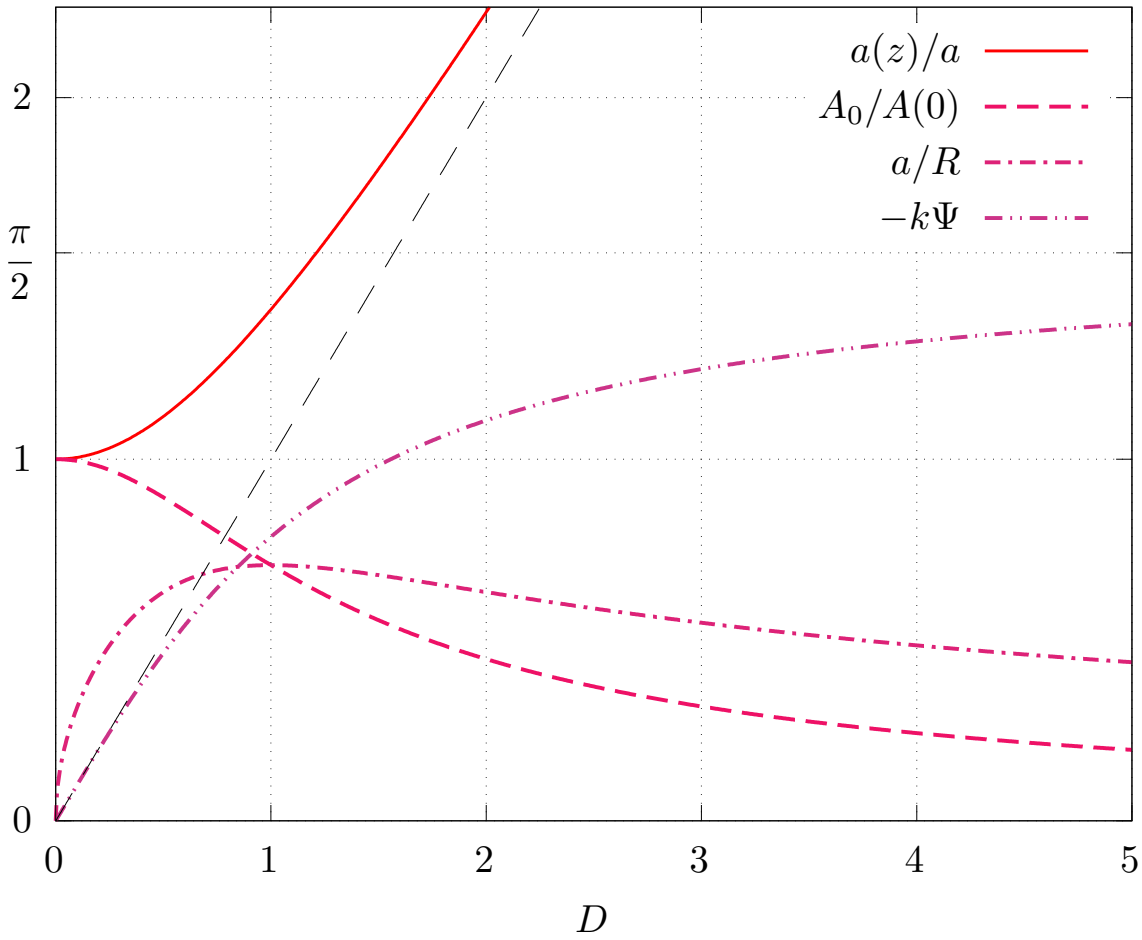


Рис. 6: Изменение с расстоянием параметров дифрагирующего пучка в процессе превращения плоской волны в сферическую

Найдём решение в случае аксиально-симметричных пучков, когда уравнение (42) следует записать в цилиндрических координатах

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} = 0. \tag{54}$$

Ищем решение (54) в виде некоторой специальной комбинации переменных

$$A = \frac{A(0)}{(1+iD)^{m+1}}\,\varphi\left(\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right), \tag{55}$$

где m — положительное целое число, $D = 2z/ka^2$.

Подстановка (55) — она называется *автомодельной* — позволяет свести исходное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\varphi(\zeta)$:

$$\zeta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + (1+\zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + (m+1)\varphi = 0, \tag{56}$$

где $\zeta = r^2/[a^2(1+iD)]$. Решениями (56) являются функции вида

$$\varphi = e^{-\zeta} L_m(\zeta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{57}$$

Здесь L_m — полином Чебышёва — Лаггера порядка m. Эти полиномы образуют ортогональную и нормированную с весом $e^{-\zeta}$ систему функций. Уравнение (54) линейно, поэтому любая линейная комбинация решений будет также его решением. Т. о. волновые пучки могут быть представлены в виде линейной комбинации решений (57), т. е. описаны выражением

$$A = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(0)}{(1+iD)^{m+1}} L_m\left(\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right) \tag{58}$$

Найденное выше решение (50) в виде гауссоиды соответствует члену ряда (58) с $m = 0$.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Пример 3. Комбинация двух гауссовых волновых пакетов

Таким образом, удаётся сконструировать простые выражения, приобретающие новый физический смысл. Например, разность двух гауссоид с одинаковыми амплитудами $A(0)$ и различными ширинами a_1 и a_2 будет описывать пучок с "провалом" на оси

$$A = \frac{A(0)}{1+iD_1}\exp\left[-\frac{r^2}{a_1^2(1+iD_1)}\right] - \frac{A(0)}{1+iD_2}\exp\left[-\frac{r^2}{a_2^2(1+iD_2)}\right]. \qquad (59)$$

Здесь $D_{1,2} = 2z/ka_{1,2}^2$. При $r = 0$ амплитуда в процессе распространения изменяется по закону

$$|A| = A(0)\frac{\dfrac{2z}{k}\left|\dfrac{1}{a_1^2} - \dfrac{1}{a_1^2}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2z}{ka_1^2}\right)^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{2z}{ka_1^2}\right)^2}}. \qquad (60)$$

Она в начале растёт пропорционально z, т. е. в центре пучка имеет место фокусировка. При больших z наступает дефокусировка и волна расходится как сферическая:

$$|A| = A(0)\,\frac{k}{2z}\left|a_1^2 - a_2^2\right|.$$

Параболическое уравнение в теории дифракции

Ещё один способ построения решений уравнения (54)

Действуя оператором $\partial/\partial z$ или $\Delta_\perp$ на любое из решений (54), получим новое решение этого уравнения.

Например, дифференцирование по z функции (50), описывающей нулевой член ряда (58), даст первый член, соответствующий $m = 1$, $L_1(\zeta) = 1 - \zeta$:

$$A = \frac{A_1(0)}{(1+iD)^2}\left[1 - \frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right]\exp\left[-\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right]. \qquad (61)$$

Выражение (61) описывает дифракцию пучка, имеющего максимальную амплитуду на оси и минимум (“тёмное кольцо”) при $r = a$.

Для того чтобы пучок был сходящимся, он должен иметь искривлённый фазовый фронт. Поэтому условие на границе примем в следующем виде:

$$A|_{z=0} = A(0)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2} - i\frac{kr^2}{2R}\right). \qquad (62)$$

Здесь R — исходный радиус кривизны фронта. Соответствующее решение при $z > 0$ можно формально получить из выражения (50), переобозначив в нём

$$\frac{1}{a^2} \to \frac{1}{a^2}\left(1 + i\frac{ka^2}{2R}\right) = \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{i}{D}\cdot\frac{z}{R}\right).$$

Это решение имеет вид

$$A = \frac{A(0)}{1 - \dfrac{z}{R} + iD}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{1 + \dfrac{i}{D}\cdot\dfrac{z}{R}}{1 - \dfrac{z}{R} + iD}\right) = A_0\, e^{ik\Psi}. \qquad (63)$$

Параболическое уравнение в теории дифракции

Действительные амплитуда и фаза в (63)

$$A_0 = \frac{A(0)}{\sqrt{\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + D^2}} \exp\left\{ -\frac{r^2}{a^2\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right]]} \right\},$$

$$k\Psi = \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{D - \frac{1}{D}\left(1-\frac{z}{R}\right)\frac{z}{R}}{\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + D^2} - \operatorname{arctg}\frac{D}{1-z/R} - \pi\,\theta(z-R), \tag{64}$$

где θ — единичная функция Хевисайда, равная нулю при $z \leqslant R$. В отличие от формул (50), (51) для квазиплоской волны, решение (63), (64) содержит два характерных параметра с размерностью длины: $z_1 = ka^2/2$ и $z_2 = R$. Отношение этих величин $\delta = z_1/z_2 = ka^2/2R$ может служить мерой того, какой из двух процессов — дифракция или геометрическая сходимость — является преобладающим.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Амплитуда, ширина и фаза гауссова пучка с искривлённым фазовым фронтом

Согласно (64) амплитуда волны на оси изменяется по закону

$$A_0 = A(0)\left(\sqrt{\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + D^2}\right)^{-1/2}. \qquad (65)$$

Она вначале растёт, достигает в точке $D = \delta/(1+\delta^2)$ максимального значения, равного $A_{\max} = A(0)\sqrt{1+\delta^2}$, а затем монотонно убывает. Ширина пучка

$$a^2(z) = a^2\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right] \qquad (66)$$

вначале уменьшается из-за фокусировки. Его минимальная ширина — радиус фокального пятна ("перетяжки" пучка) — равна $a_{\min} = a/\sqrt{1+\delta^2}$. При $D > \delta/(1+\delta^2)$ ширина монотонно возрастает. Фазовый сдвиг на оси

$$-k\Psi(r=0) = \operatorname{arctg}\frac{D}{1-z/R} + \pi\,\theta(z-R)$$

монотонно возрастает с увеличением пройдённого волной расстояния. Сдвиг, равный нулю при $z=0$, достигает значения $\pi/2$ в точке геометрического фокуса $z=R$, а затем асимптотически стремится к значению $\pi - \operatorname{arctg}\delta^{-1}$.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Изменение при распространении амплитуды и ширины пучка из примера 4

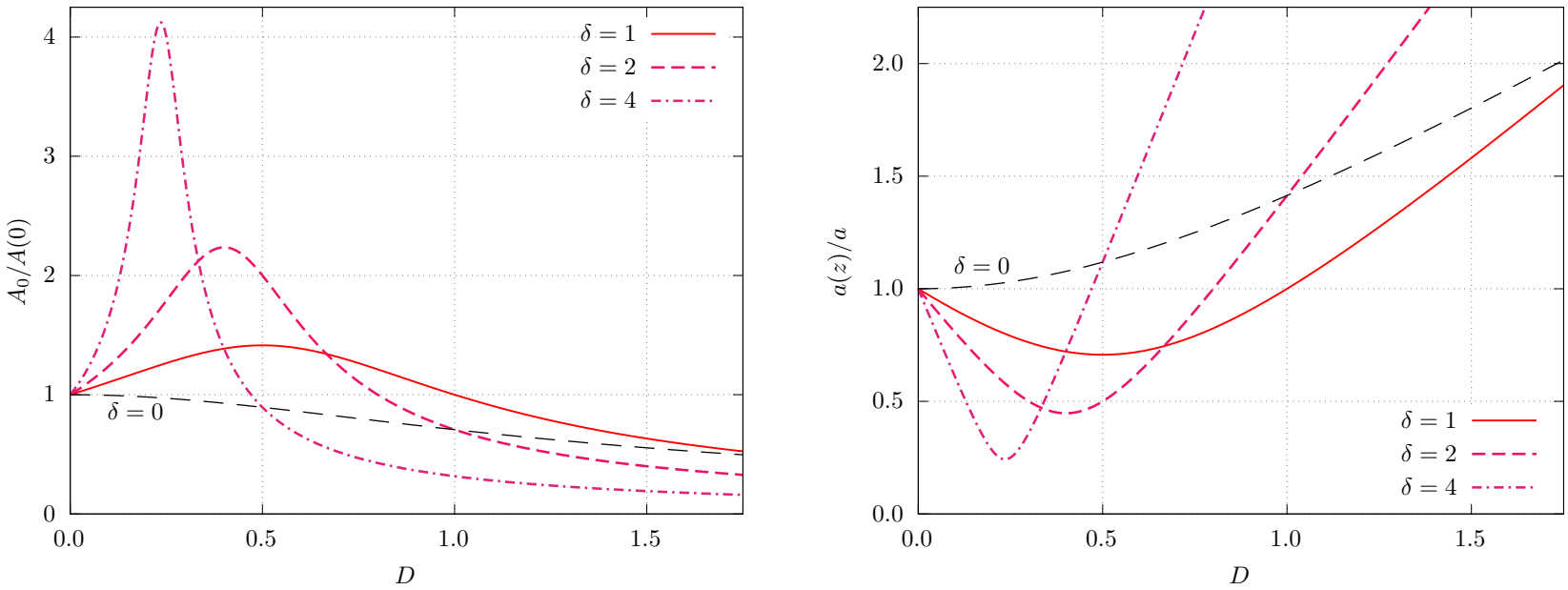


Рис. 7: Изменение с расстоянием параметров сфокусированного пучка с учётом дифракции

Параболическое уравнение в теории дифракции

Альтернатива параболическому уравнению

Вместо того чтобы решать параболическое уравнение теории дифракции, записанное для комплексной амплитуды A, часто используют систему уравнений для действительных функций — амплитуды A_0 и фазы $k\Psi$. Полагая в уравнении (42) $A = A_0 e^{ik\Psi}$ и собирая отдельно члены, образующие действительную и мнимую части полученного соотношения, придём к системе

$$2\frac{\partial \Psi}{\partial z} + (\boldsymbol{\nabla}_\perp \Psi)^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\Delta_\perp A_0}{A_0}, \tag{67}$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \boldsymbol{\nabla}_\perp A_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}_\perp \Psi + \frac{1}{2} A_0 \, \Delta_\perp \Psi = 0. \tag{68}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что выражения (51) для квазиплоской и (64) для сфокусированной волн являются точными решениями этой системы.

Параболическое уравнение в теории дифракции

Приближение геометрической оптики

В уравнениях (67), (68) удобно совершить переход к приближению геометрической оптики. В пределе очень коротких длин волн ($k \to \infty$) правая часть (67) становится пренебрежимо малой. Отсутствие члена $\Delta_\perp A_0$, описывающего поперечную диффузию действительной амплитуды, позволяет решать уравнение (67) независимо от (68).
Интересно сравнить результаты, полученные с помощью параболического уравнения и в приближении геометрической оптики. Для аксиально-симметричных пучков система уравнений примет вид

$$\begin{gathered} 2\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 = 0, \\ \frac{\partial A_0}{\partial z} + \frac{\partial A_0}{\partial r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{A_0}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = 0. \end{gathered} \tag{69}$$

Параболическое уравнение в теории дифракции

Решение (69)

$$\Psi = \frac{r^2}{2(z-R)},$$
$$A_0 = \frac{1}{1-z/R}\,\varphi\left(\frac{r^2}{a^2(1-z/R)^2}\right). \tag{70}$$

Здесь φ — произвольная гладкая функция. К выражениям (70) можно также прийти, исходя из имеющегося решения (64) для сфокусированного пучка. Устремляя в нём волновой параметр D к нулю, получим в точности решение (70) с функцией $\varphi(\zeta) = e^{-\zeta}$. Таким образом, решение в приближении геометрической оптики не описывает поля вблизи фокуса. При $z \to R$ амплитуда неограниченно возрастает. Фокальное пятно при $D \to 0$ стягивается в точку. Кроме того, в решении (70) фаза изменяется скачком на π при прохождении волны через фокус $z = R$.

Отражение ограниченных волновых пучков

Постановка задачи

Рассмотрим отражение волнового пучка от границы раздела двух однородных сред. Для простоты решим двумерную задачу, т. е. будем считать, что волновой пучок, падающий на границу раздела, образован при дифракции плоской волны с комплексной амплитудой

$$u(x,z) = u_0(x,z)\, e^{ik(x\sin\theta_0 + z\cos\theta_0)} \tag{71}$$

на плоском экране со щелью, шириной b, расположенном в плоскости $z = 0$ (рис. 8). Угловой спектр пучка при $z = 0$ определяется в этом случае формулой (22). Будем считать, что $\lambda/(b\cos\theta_0) \ll 1$, следовательно, пучок имеет узкий угловой спектр. На расстоянии ℓ от экрана со щелью находится граница раздела двух сред, от которой происходит отражение пучка (рис. 8).

Отражение ограниченных волновых пучков

Геометрия задачи

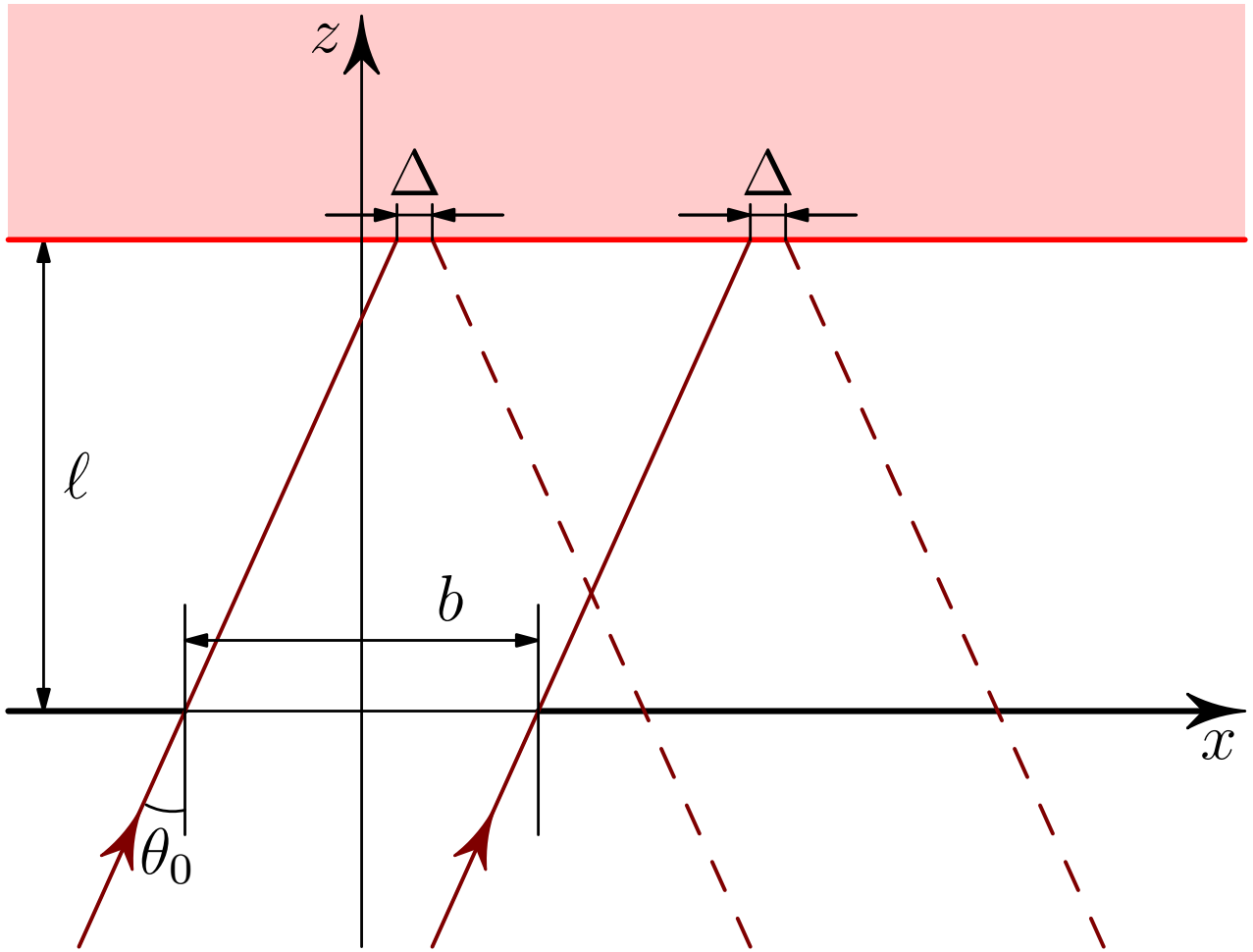


Рис. 8: Смещение пучка при отражении от границы раздела двух сред

Отражение ограниченных волновых пучков

Поля падающего и отражённого пучков

Поле падающего пучка на границе раздела при $z = \ell$ согласно (14), (17) и (22) запишем в виде суперпозиции плоских волн:

$$u(x,\ell) = \frac{e^{ik\ell\cos\theta_0}}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) \times \\ \times \exp\left[-i(k_x - k_{x0})\xi + ik_x x - i\ell\frac{k_x^2}{2k}\right] \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}k_x. \tag{72}$$

Чтобы записать поле отражённого пучка в аналогичном виде, умножим каждую плоскую волну, образующую пучок, на коэффициент Френеля $r(k_x) = |r(k_x)|\,e^{i\varphi(k_x)}$, тогда

$$u_{\mathrm{R}}(x,\ell) = \frac{e^{ik\ell\cos\theta_0}}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |r(k_x)|\,u_0(\xi) \times \\ \times \exp\left\{i\left[\varphi(k_x) - (k_x - k_{x0})\xi + k_x x - \ell\frac{k_x^2}{2k}\right]\right\} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}k_x. \tag{73}$$

Отражение ограниченных волновых пучков

Рассмотрим случай, когда в пределах ширины углового спектра пучка модуль коэффициента Френеля изменяется мало, тогда можно положить $|r(k_x)| = |r(k_{x0})|$ и вынести из-под знака интеграла. Фазу коэффициента Френеля разложим в ряд по $(k_x - k_{x0})$:

$$\varphi(k_x) = \varphi(k_{x0}) + \beta\varphi'(k_{x0}) + \frac{\beta^2}{2}\varphi''(k_{x0}) + \ldots, \qquad (74)$$

где

$$\beta = (k_x - k_{x0}). \qquad (75)$$

Ограничимся в (73) членами первого порядка по β и по k_x, т. е. пренебрежём дифракционным расплыванием пучка и изменением его поперечного сечения при отражении.

Отражение ограниченных волновых пучков

Учитывая введённое обозначение (75), интегралы (72), (73) можно преобразовать к виду

$$u(x,\ell) = \frac{e^{ik(\ell\cos\theta_0 + x\sin\theta_0)}}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\, e^{i\beta(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\beta, \tag{76}$$

$$u_{\mathrm{R}}(x,\ell) = |r(k_{x0})|\,\frac{e^{ik(\ell\cos\theta_0 + x\sin\theta_0)}}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\, e^{i\beta[x-\xi-\varphi'(k_{x0})]}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\beta. \tag{77}$$

Сравнивая (76) и (77), заметим, что

$$|u_{\mathrm{R}}(x,\ell)| = |r(k_{x0})| \cdot |u(x+\varphi'(k_{x0}),\ell)|\,. \tag{78}$$

Отсюда следует, что пучок при отражении смещается вдоль границы раздела на величину (см. рис. 8)

$$\Delta = -\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}k_x}\right)_{k_{x0}}. \tag{79}$$

Отражение ограниченных волновых пучков

Отражение ограниченных волновых пучков

Обобщение метода Кирхгофа для векторных полей

Обобщение метода Кирхгофа для векторных полей

Обобщение метода Кирхгофа для векторных полей

Контрольные вопросы и задания

1.
2.
3.
4.
5.

Источники I

[1] А.И. Борисенко и И.Е. Тарапов. *Векторный анализ и начала тензорного исчисления*. 5-е. Харьков: «Вища школа», 1978, с. 216.

[2] М.Б. Виноградова, О.В. Руденко и А.П. Сухоруков. *Теория волн*. М.: Наука, 1979, с. 384.