Надёжность информационных систем. Лабораторная работа №6. Марковское моделирование систем с деградацией и стратегиями профилактического обслуживания

Макаров П. А.

Содержание

1 Введение **1**

2 Краткая теория **2**
2.1 Марковские модели с непрерывным временем 2
2.2 Уравнения Колмогорова 3
2.3 Основные показатели надёжности восстанавливаемой системы 3
2.4 Модель элемента с деградацией 4
2.5 Стратегии обслуживания 4

3 Практическое задание **5**
3.1 Системный анализ 5
3.2 Аналитический расчёт 5
3.3 Статистическое моделирование на Python 6

4 Требования к отчёту **7**

5 Контрольные вопросы **7**

Список источников **8**

1 Введение

Современные ИС всё чаще переходят от реактивной модели обслуживания «восстановление после отказа» (Corrective Maintenance) к эксплуатации в режиме непрерывного мониторинга технического состояния (CBM — Condition-Based Maintenance). В отличие от классических моделей, где элемент находится либо в полностью работоспособном состоянии, либо в состоянии отказа, реальные элементы проходят через цепочку промежуточных состояний деградации: от полной исправности до постепенной потери характеристик и, наконец, до полного отказа.

Принципиальная особенность таких систем — решение о восстановлении принимается не только по факту отказа, но и на основе мониторинга текущего состояния (PdM — Predictive Maintenance). Это открывает возможность *оптимизации стратегии обслуживания.* Ключевой вопрос: целесообразно ли экономически

проводить профилактику системы, и когда именно — при обнаружении лёгкой или сильной степени деградации, либо эффективно только восстановление по факту отказа?

Для анализа подобных систем классические формулы теории надёжности неприменимы. Естественным математическим аппаратом становятся **марковские модели с непрерывным временем** (CTMC — Continuous-Time Markov Chains) и **дифференциальные уравнения Колмогорова**, описывающие динамику вероятностей состояний.

Цель работы

1. Освоить марковское моделирование восстанавливаемых систем с многоуровневой деградацией.
2. Научиться строить графы состояний и записывать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для различных стратегий обслуживания.
3. Получить аналитические выражения для стационарных вероятностей состояний и ключевых показателей надёжности (коэффициент готовности, средняя наработка до отказа, среднее время восстановления).
4. Исследовать влияние стратегии профилактического обслуживания на технико-экономические показатели системы.
5. Найти оптимальный порог превентивного восстановления, минимизирующий суммарные эксплуатационные затраты.
6. Разработать программу на Python для численного решения системы ОДУ, оптимизации стратегии обслуживания и верификации аналитических результатов методом статистического моделирования.

2 Краткая теория

Теоретические основы марковского моделирования надёжности кратко представлены в Лекции 11 конспекта [1], а более фундаментально изложены в учебнике [2].

2.1 Марковские модели с непрерывным временем

Марковская модель с непрерывным временем — это стохастический процесс $\{X(t), t \geqslant 0\}$ с дискретным множеством состояний $S = \{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$, обладающий свойством отсутствия последействия: условное распределение $X(t + \Delta t)$ при известном $X(t)$ не зависит от истории процесса до момента t.

Динамика такого процесса полностью определяется *матрицей интенсивностей переходов* $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$, где:

- $q_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$ — интенсивность перехода из состояния S_i в S_j;
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ — диагональные элементы.

2.2 Уравнения Колмогорова

Марковские модели с несколькими состояниями описываются системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}, \tag{1}$$

где $\mathbf{P}(t) = [P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)]$ — вектор вероятностей состояний.

Система (1) в покомпонентной форме имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}P_j(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i \neq j} P_i(t)\, q_{ij} - P_j(t) \sum_{k \neq j} q_{jk}. \tag{2}$$

В *стационарном режиме* ($t \to \infty$) вероятности состояний стабилизируются

$$\frac{\mathrm{d}P_j(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_j(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \pi_j \neq f(t)$$

и система (1) сводится к линейным алгебраическим уравнениям:

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \qquad \sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1, \tag{3}$$

определяющим *стационарное распределение* $\boldsymbol{\pi}$.

2.3 Основные показатели надёжности восстанавливаемой системы

- **Мгновенный коэффициент готовности**:

$$K_a(t) = \sum_{j \in S_{\text{up}}} P_j(t), \tag{4}$$

  где $S_{\text{up}} \subseteq S$ — множество работоспособных состояний.

- **Стационарный коэффициент готовности** — установившаяся вероятность того, что система работоспособна:

$$K_a = \sum_{j \in S_{\text{up}}} \pi_j. \tag{5}$$

- **Коэффициент простоя** $K_r = 1 - K_a$.

- **Стационарная интенсивность отказов** λ_{sys} — суммарная интенсивность переходов из работоспособных состояний в неработоспособные:

$$\lambda_{\text{sys}} = \frac{1}{K_a} \sum_{i \in S_{\text{up}}} \sum_{j \notin S_{\text{up}}} \pi_i\, q_{ij}. \tag{6}$$

- **Средняя наработка до отказа** $MTTF = 1/\lambda_{\text{sys}}$.

- **Среднее время восстановления** $MTTR$ связано с готовностью соотношением:

$$K_a = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}. \tag{7}$$

2.4 Модель элемента с деградацией

Рассмотрим одиночный элемент информационной системы (сервер, сетевое устройство), который в процессе эксплуатации проходит через несколько состояний деградации (см. рис. 1):

- S_0 — полностью исправен;
- S_1 — лёгкая степень деградации (элемент работоспособен, но интенсивность отказа повышается);
- S_2 — глубокая деградация (объект работает “на пределе”, риск отказа — высокий);
- S_3 — полный отказ.

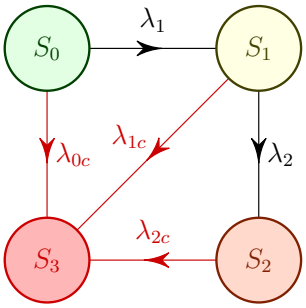


Рис. 1: Марковская модель элемента с деградацией

Согласно схеме, показанной на рис. 1, приняты следующие интенсивности деградационных переходов в системе:

- λ_{0c} — интенсивность внезапного отказа из S_0;
- λ_1 — интенсивность перехода $S_0 \to S_1$ (начало лёгкой деградации);
- λ_{1c} — интенсивность отказа из S_1 (минуя S_2);
- λ_2 — интенсивность перехода $S_1 \to S_2$ (углубление деградации);
- λ_{2c} — интенсивность перехода $S_2 \to S_3$ (отказ из критического состояния);

2.5 Стратегии обслуживания

Рассмотрим четыре стратегии обслуживания. Работоспособными во всех стратегиях считаются состояния $S_{\text{up}} = \{S_0, S_1, S_2\}$, а неработоспособное — только S_3.

1. **Стратегия 1 (corrective only).** Восстановление производится только после полного отказа: $S_3 \to S_0$ с интенсивностью μ_c ($\mu_{p1} = \mu_{p2} = 0$).
2. **Стратегия 2 (preventive at S_2).** Превентивное восстановление при достижении глубокой деградации: $S_2 \to S_0$ с интенсивностью $\mu_{p2} > 0$; после отказа: $S_3 \to S_0$ с интенсивностью μ_c.
3. **Стратегия 3 (preventive at S_1).** Профилактика при обнаружении лёгкой деградации: $\mu_{p1} > 0$, $\mu_{p2} = 0$;

4. **Стратегия 4 (preventive at S_1 and S_2).** Агрессивная превентивная стратегия — восстановление при любой деградации: $S_1 \to S_0$, $S_2 \to S_0$ с интенсивностями μ_{p1} и μ_{p2}; после отказа: $S_3 \to S_0$ с интенсивностью μ_c.

Интенсивность экономических затрат в стационарном режиме:

$$E[C] = \sum_{i,j} C_{ij} \cdot q_{ij} \cdot \pi_i + C_d \cdot \sum_{k \notin S_{\text{up}}} \pi_k, \tag{8}$$

где C_{ij} — стоимость перехода из состояния i в состояние j, C_d — стоимость простоя в единицу времени.

3 Практическое задание

3.1 Системный анализ

Перед переходом к аналитическим расчётам необходимо выполнить следующие шаги.

1. Построить полные графы состояний системы для каждой из четырёх стратегий обслуживания (см. раздел 2.5), дополняя модель, изображённую на рис. 1, соответствующими процессами восстановлений.
2. Обосновать смысл каждой стратегии и привести примеры элементов ИС, для которых она может быть применима.
3. Для каждого графа выписать матрицу интенсивностей переходов $\mathbf{Q}$ (четыре матрицы размером 4×4 каждая).

3.2 Аналитический расчёт

Алгоритм аналитического расчёта следующий.

1. Для каждой матрицы $\mathbf{Q}$, на основе решения системы уравнений (3) необходимо найти стационарное распределение $\boldsymbol{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3]$.
2. Далее, с помощью (5) рассчитывается стационарный коэффициент готовности K_a. Выполняется сравнение K_a для всех четырёх стратегий.
3. Для каждой стратегии обслуживания по формуле (8) вычисляется интенсивность затрат в стационарном режиме. Экономические затраты $E[C]$ сравниваются для всех стратегий.
4. Строятся графики:
   - Зависимости $P_i(t)$ для всех четырёх состояний при стратегии “Corrective only” на интервале $t \in [0, 8\,760]$ ч;
   - Зависимости $E[C]$ от стоимости профилактики $C_{10} \in [500, 5\,000]$ у.е. для стратегии “Preventive at S_1”.
5. Определяется оптимальная стратегия обслуживания с точки зрения минимума $E[C]$.

Для всех вычислений использовать численные значениями параметров, приведённые в таблицах 1 – 3 (в разделе отчёта, посвящённом системному анализу задания, следует обосновать выбор указанных значений).

Таблица 1: Деградационные параметры модели

Параметр	**Значение**	$MTTF$, ч
λ_{0c}	0.00005 ч$^{-1}$	?
λ_1	0.0001 ч$^{-1}$	?
λ_{1c}	0.0003 ч$^{-1}$	?
λ_2	0.0005 ч$^{-1}$	?
λ_{2c}	0.002 ч$^{-1}$	?

Таблица 2: Интенсивности восстановлений

Параметр	**Значение**	$MTTR$, ч
μ_c	0.1 ч$^{-1}$	?
μ_{p1}	0.2 ч$^{-1}$	?
μ_{p2}	0.1 ч$^{-1}$	?

3.3 Статистическое моделирование на Python

Необходимо написать скрипт на Python, который:

1. Решает систему (1) численно методом Рунге-Кутты;
2. Находит стационарное распределение $\boldsymbol{\pi}$ решением линейной системы;
3. Проводит статистическое моделирование методом Монте-Карло ($N = 10\,000$ испытаний);
4. Сравнивает аналитические и эмпирические результаты;
5. Оптимизирует стратегию обслуживания по критерию $E[C]$.

Требования к скрипту

- Реализовать функцию построения матрицы $\mathbf{Q}$ по заданным параметрам и стратегии обслуживания;
- Использовать `scipy.integrate.solve_ivp` для решения системы ОДУ;
- Реализовать функцию нахождения стационарного распределения через решение линейной системы (замена последнего уравнения на условие нормировки);
- Провести $N = 10\,000$ испытаний Монте-Карло: моделировать траектории марковского процесса, генерируя времена переходов из экспоненциальных распределений;

Таблица 3: Экономические параметры модели

Параметр	**Значение**	**Описание**
C_{20}	10 000 у.е.	Стоимость корректирующего ремонта
C_{10}	2 000 у.е.	Стоимость профилактики в S_1
C_{20}	5 000 у.е.	Стоимость профилактики в S_2
C_d	500 у.е./ч	Стоимость простоя в единицу времени

- Рассчитать эмпирические вероятности состояний и доверительные интервалы 95%;
- Построить графики динамики $P_i(t)$, сравнения аналитических и эмпирических результатов, оптимизации стратегии.

4 Требования к отчёту

Отчёт должен содержать:

1. Титульный лист, цель работы и краткие теоретические положения.
2. Матрицу интенсивностей переходов $\mathbf{Q}$ и подробные выкладки нахождения стационарного распределения.
3. Результаты расчёта K_a и $E[C]$ для четырёх стратегий обслуживания в сравнительной таблице.
4. Листинг программного кода с комментариями.
5. Графики, сгенерированные скриптом:
   - динамика $P_i(t)$ для всех состояний;
   - сравнение аналитических и эмпирических (Монте-Карло) вероятностей с доверительными интервалами;
   - сравнение стратегий по K_a и $E[C]$;
   - зависимость $E[C]$ от стоимости профилактики.
6. Выводы о том, какая стратегия обслуживания является оптимальной и почему.

5 Контрольные вопросы

1. В чём заключается метод дифференциальных уравнений Колмогорова? Какие допущения лежат в его основе?
2. Что такое матрица интенсивностей переходов $\mathbf{Q}$? Каковы свойства её элементов?
3. Как найти стационарное распределение вероятностей состояний? Почему система (3) имеет ненулевое решение?
4. Что такое коэффициент готовности K_a? Как он рассчитывается для систем с несколькими работоспособными состояниями?
5. В чём разница между корректирующим и профилактическим обслуживанием? Как это отражается в марковской модели?
6. Как формируется стоимостной критерий $E[C]$? Какие составляющие он включает?
7. Почему профилактическое обслуживание может быть экономически выгоднее Corrective Maintenance, даже если требует дополнительных затрат?

8. Как изменится модель, если элемент может иметь больше четырёх состояний (например, 5 или 6 уровней деградации)?

9. Каковы ограничения марковских моделей? Когда они неприменимы?

10. Как верифицировать аналитические результаты методом Монте-Карло? Как рассчитать доверительный интервал для эмпирических вероятностей?

Список источников

Книги и учебные пособия

1. *Расулова С. С.* Надёжность информационных систем. — Ташкент : Ташкентский университет информационных технологий, 2007. — С. 118.

2. *Гнеденко Б. В.*, *Беляев Ю. К.*, *Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надёжности: Основные характеристики надёжности и их статистический анализ. — Изд. 3, стереотип. — Москва : URSS, 2024. — С. 584.