Надёжность информационных систем. Лекции 5–6. Характеристики надёжности восстанавливаемых объектов

Макаров П. А.

6 и 20 ноября 2026 г.

Содержание

1 Необходимая терминология **1**

2 Основные количественные показатели надёжности восстанавливаемых объектов **5**

3 Показатели ремонтопригодности и восстанавливаемости **6**

4 Комплексные показатели надёжности **7**

5 Об использовании различных показателей надёжности **10**

6 Аналитический расчёт надёжности восстанавливаемых систем **11**

7 Контрольные вопросы и задания **17**

Список литературы **17**

1 Необходимая терминология

Согласно ГОСТ Р 27.102-2021 [1] к теме данных лекций относятся следующие основные термины.

Опр. 1. ***Восстанавливаемость / Recoverability*** **:** Свойство объекта, заключающееся в его способности восстанавливаться после отказа без ремонта.

Примечания:

1. Для восстановления могут требоваться или не требоваться внешние воздействия. Для случая, когда внешние воздействия не требуются, может использоваться термин «самовосстанавливаемость».

2. Восстанавливаемость не имеет непосредственного отношения к надёжности объекта.
3. Восстанавливаемость, являясь свойством объекта, не характеризует его надёжность. Объект, обладающий свойством восстанавливаемости, может иметь как высокую, так и низкую надёжность, также как и объект, не обладающий этим свойством.

Опр. 2. ***Восстанавливаемый объект / Restorable item*** **:** Объект, восстановление работоспособного состояния которого в рассматриваемой ситуации предусмотрено технической и конструкторской документацией.

Опр. 3. ***Невосстанавливаемый объект / Non-restorable item*** **:** Объект, восстановление работоспособного состояния которого в рассматриваемой ситуации не предусмотрено технической и конструкторской документацией.

Опр. 4. ***Ремонт / Repair*** **:** Комплекс технических операций и организационных действий по восстановлению исправного или работоспособного состояния объекта и восстановлению ресурса объекта или его составных частей.

Примечания:

1. Ремонт включает локализацию, диагностирование, устранение неисправности и контроль функционирования.
2. Ремонты подразделяют на плановые и внеплановые.
   - Плановый ремонт — ремонт, выполняемый по плану в соответствии с требованиями документации. Плановые ремонты по объёму выполняемых работ, трудоёмкости и периодичности проведения подразделяют на текущие, средние и капитальные.
   - Внеплановый ремонт — ремонт, не предусмотренный планом. Внеплановые ремонты могут быть обусловлены отказом объекта, появлениями повреждений (неисправностей), нарушением правил технической эксплуатации. Внеплановые ремонты подразделяют на аварийно-восстановительные и ремонты по состоянию объекта.

Опр. 5. ***Ремонтопригодный объект / Repairable item*** **:** Объект, ремонт которого предусмотрен документацией и возможен в заданных условиях.

Примечание: Заданные условия могут включать технические, экономические и другие аспекты.

Опр. 6. ***Неремонтопригодный объект / Non-repairable item*** **:** Объект, ремонт которого не предусмотрен документацией.

Опр. 7. ***Замена / Substitution*** **:** Процедура поддержания или восстановления работоспособности объекта путём установки запасной части вместо отказавшего или изношенного элемента объекта.

Опр. 8. ***Запасная часть / Spare part*** **:** Отдельный узел, устройство или элемент, предназначенные для замены изношенных, неисправных или

отказавших составных частей объекта с целью поддержания или восстановления его работоспособного состояния.

Опр. 9. ***Запасные части, инструменты и принадлежности; ЗИП / Spare parts, tools and accessories; SPTA*** **:** Совокупность запасов материальных средств, сформированная в зависимости от назначения и особенностей использования объекта и предназначенная для обеспечения его функционирования, технического обслуживания и ремонта.

Примечание: Набор ЗИП комплектуют в соответствии с требованиями документации.

Опр. 10. ***Комплект ЗИП / Maintenance package (SPTA package)*** **:** Набор запасных частей, инструментов, принадлежностей и расходных материалов, необходимых для обеспечения функционирования, технического обслуживания и ремонта объекта.

Примечания:

1. Комплект ЗИП формируют в соответствии с требованиями документации, с учётом назначения и особенностей использования объекта.
2. Все виды комплектов ЗИП условно делятся на основные и специальные, а в зависимости от состава, назначения и размещения — на одиночные, групповые и ремонтные.

Опр. 11. ***Система ЗИП / SPTA system*** **:** Совокупность комплектов ЗИП разных видов и уровней иерархии, необходимых для поддержания и восстановления работоспособности объекта или совокупности объектов.

Примечания:

1. Систему ЗИП формируют в соответствии с требованиями документации, с учётом назначения и особенностей использования объектов.
2. Существуют двухуровневые и многоуровневые системы ЗИП. На каждом уровне структуры системы ЗИП могут быть использованы различные стратегии пополнения.

Опр. 12. ***Восстановление / Restoration*** **:** Процесс и событие, заключающиеся в переходе объекта из неработоспособного состояния в работоспособное состояние.

Примечания:

1. Восстановление как процесс характеризуется операциями и продолжительностью времени от момента возникновения отказа до момента восстановления работоспособного состояния объекта (см. также Опр. 14).
2. Восстановление как событие характеризуется моментом восстановления работоспособного состояния объекта после отказа.

Опр. 13. ***Самовосстановление / Self-recovery*** **:** Восстановление объекта без вмешательства извне.

Опр. 14. ***Время восстановления / Restoration time*** **:** Время, затрачиваемое непосредственно на выполнение операций по восстановлению объекта.

Опр. 15. ***Средняя наработка между отказами / Mean (operating) time between failures; MTBF*** **:** Математическое ожидание наработки объекта между отказами.

Примечание: В случае, когда наработка между отказами подчиняется экспоненциальному распределению, её называют средней наработкой на отказ и определяют как отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию количества его отказов в течение этой наработки.

Этот показатель применим к восстанавливаемым объектам, при эксплуатации которых допускаются многократно повторяющиеся отказы. Очевидно, что это должны быть несущественные отказы, не приводящие к серьёзным последствиям и не требующие значительных затрат на восстановление работоспособного состояния. Эксплуатация таких объектов может быть описана следующим образом: в начальный момент времени объект начинает работать и продолжает работать до первого отказа; после отказа происходит восстановление работоспособности, и объект вновь работает до отказа и т. д. На оси времени моменты отказов образуют поток отказов, а моменты восстановлений — поток восстановлений. На оси суммарной наработки (когда время восстановления не учитывается) моменты отказов образуют поток отказов (см. рис. 1). Полное и строгое математическое описание эксплуатации объектов по этой схеме построено на основе теории восстановления.

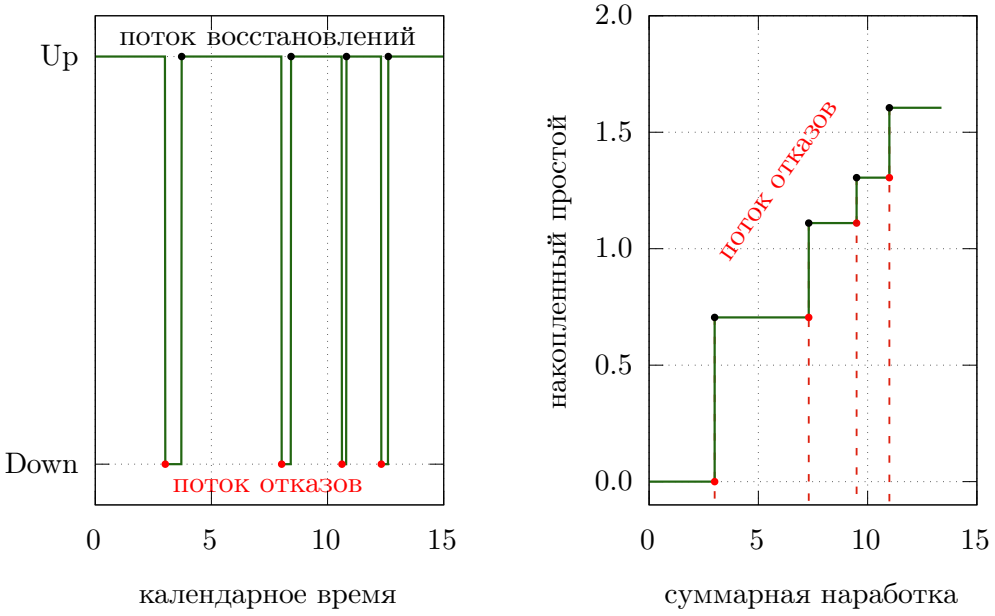


Рис. 1: Иллюстрация понятий потока отказов и потока восстановлений

Средней наработке между отказами $MTBF$ соответствует следующая

формула:

$$MTBF = \frac{t}{\mathbb{M}\{n(t)\}}, \tag{1}$$

где t – суммарная наработка; $n(t)$ — количество отказов, произошедших в течение этой наработки.

В общем случае средняя наработка между отказами оказывается функцией t. Для стационарных потоков отказов средняя наработка на отказ от t не зависит.

Статистическую оценку средней наработки между отказами вычисляют по формуле, аналогичной формуле (1)

$$\widehat{MTBF} = \frac{t}{n(t)}. \tag{2}$$

В отличие от формулы (1) здесь $n(t)$ — это количество отказов, фактически произошедших за период суммарной наработки t. Формула (2) допускает обобщение на случай, когда объединяют данные, относящиеся к группе однотипных объектов, которые эксплуатируют в статистически однородных условиях. Если поток отказов стационарный, то в формуле (2) достаточно заменить t на сумму наработок всех наблюдаемых объектов и заменить $n(t)$ на суммарное количество отказов этих объектов.

2 Основные количественные показатели надёжности восстанавливаемых объектов

Опр. 16. ***(мгновенный) Параметр потока отказов / Failure intensity*** **:** Предел отношения вероятности возникновения отказа восстанавливаемого объекта за достаточно малый интервал времени к продолжительности этого интервала, стремящейся к нулю.

Для статистически однородного ансамбля объектов, параметром потока отказов ω называется отношение числа отказавших объектов n в единицу времени к числу испытываемых объектов N при условии, что все вышедшие из строя объекты заменяются исправными (новыми или отремонтированными). Параметр потока отказов определяют по формуле

$$\omega(t) = \frac{1}{N} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t}, \tag{3}$$

где Δt — малый период наработки, $n(t)$ — суммарное количество всех отказов, возникших с начального момента времени до достижения заданной наработки t. Разность $n(t+\Delta t) - n(t)$ представляет собой количество отказов на отрезке Δt.

Для любого момента наработки независимо от закона распределения ВБР параметр потока отказов больше, чем частота отказов, т. е. $\omega(t) > f(t)$.

Статистически параметр потока отказов оценивается по следующей формуле:

$$\widehat{\omega}(t) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\widehat{n}(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{4}$$

где $\widehat{n}(\Delta t)$ — число отказавших объектов в интервале времени от $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$.

Наряду с параметром потока отказов $\omega(t)$ в расчётах и обработке экспериментальных данных часто используют средний параметр потока отказов $\omega_{\text{ср}}(t)$.

Опр. 17. ***Средний параметр потока отказов / Mean failure intensity*** **:** Математическое ожидание мгновенного параметра потока отказов за заданный период времени.

$$\omega_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\mathbb{M}\{n(t_2) - n(t_1)\}}{t_2 - t_1}. \tag{5}$$

По сравнению с формулой (3) здесь рассматривается количество отказов на интервале наработки $[t_1, t_2]$, причём $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Статистическая оценка среднего параметра потока отказов имеет вид

$$\widehat{\omega}_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{N} \cdot \frac{n(t_2) - n(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{6}$$

Если поток отказов стационарный, то параметры, определяемые по формулам (3) и (5), не зависят от наработки t.

Опр. 18. ***Стационарный параметр потока отказов / Stationary failure intensity*** **:** Предел мгновенного параметра потока отказов при стремлении рассматриваемого момента времени к бесконечности.

$$\omega_{\text{st}} = \lim_{t \to \infty} \omega(t). \tag{7}$$

Для стационарных потоков можно применять формулу

$$\widehat{\omega}_{\text{st}} = \frac{1}{\widehat{\widehat{T}}}, \tag{8}$$

где $\widehat{T} = \widehat{MTBF}$ — оценка средней наработки между отказами (см. Опр. 15).

Все формулы данного раздела остаются справедливыми и для случая, когда вместо статистического ансамбля рассматривается только один объект ($N = 1$). В этом случае под $n(t)$ понимается количество отказов именно этого объекта в течение заданной наработки t.

3 Показатели ремонтопригодности и восстанавливаемости

Опр. 19. ***Вероятность восстановления / Probability of restoration*** **:** Вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданного значения.

Опр. 20. ***Среднее время восстановления / Mean restoration time*** **:** Математическое ожидание времени восстановления.

Часто на практике для обозначения этой характеристики используется аббревиатура $MTTR$ (Mean Time To Recovery).

Опр. 21. ***Гамма-процентное время восстановления / Gamma-percentile restoration time*** **:** Время, в течение которого, восстановление работоспособности объекта будет осуществлено с вероятностью выраженной в процентах.

Опр. 22. ***Интенсивность восстановления / Restoration rate*** **:** Условная плотность вероятности восстановления работоспособного состояния объекта, определённая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента восстановление не было завершено.

Данная величина будет обозначаться нами как μ. В случае экспоненциального распределения времени восстановления справедливо следующее соотношение[1]:

$$\mu = \frac{1}{MTTR}. \tag{9}$$

Опр. 23. ***Средняя трудоёмкость восстановления / Mean restoration man-hours mean; maintenance man-hours*** **:** Математическое ожидание трудоёмкости восстановления объекта после отказа.

Примечание: Затраты времени и труда на проведение технического обслуживания и ремонтов с учётом конструктивных особенностей объекта, его технического состояния и условий эксплуатации характеризуются оперативными показателями ремонтопригодности.

4 Комплексные показатели надёжности

В отличие от единичных, комплексные показатели надёжности количественно характеризует не менее двух свойств, определяющих надёжность объекта, например его безотказность и ремонтопригодность и т. п. Одним из важнейших комплексных показателей надёжности является коэффициент готовности K_a, который используется в качестве показателя надёжности, если кроме факта отказа необходимо учитывать время восстановления.

Опр. 24. ***(мгновенный) Коэффициент готовности / (instantaneous) Availability factor*** **:** Вероятность того, что в данный момент времени объект находится в работоспособном состоянии, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается.

Примечание: В некоторых случаях выделяют проектный коэффициент готовности, определяемый при проектировании для идеальных условий

[1]Отметим, что это выражение аналогично связи интенсивности отказов λ и средней наработке до отказа $MTTF$ при экспоненциальном распределении ВБР.

эксплуатации, технического обслуживания и ремонта, и коэффициент эксплуатационной готовности, определяемый для реальных условий эксплуатации, технического обслуживания и ремонта. Отношение эксплуатационного коэффициента готовности к проектному характеризует использование объекта по его назначению.

Коэффициент готовности характеризует готовность объекта к применению по назначению только в отношении его работоспособности в произвольный момент времени. Различают стационарный и нестационарный коэффициенты готовности, а также средний коэффициент готовности.

Средний коэффициент готовности определяется как вероятность того, что в произвольный заданный момент времени t объект находится в работоспособном состоянии (кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекты по назначению не предусматривается)

$$K_a = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}, \tag{10}$$

где $MTTF$ — средняя наработка до отказа, а $MTTR$ — среднее время восстановления. Так как имеет место равенство $MTBF = MTTF + MTTR$, то средний коэффициент готовности также можно определить следующим образом

$$K_a = \frac{MTTF}{MTBF}. \tag{11}$$

Статистически оценка мгновенного коэффициента готовности имеет вид

$$\widehat{K}_a(t) = \frac{N_{\text{up}}(t)}{N_0}, \tag{12}$$

где $N_{\text{up}}(t)$ — число объектов, находящихся в работоспособном состоянии в момент времени t. Разность $N_0 - N_{\text{up}}(t)$ выражает количество объектов, находящихся в момент времени t в состоянии восстановления (ремонта).

С точки зрения пользователей сложных ИС, понятие их надёжности оценивается по коэффициенту готовности системы K_a, то есть по отношению времени работоспособного состояния системы к времени её незапланированного простоя. На практике на основе коэффициента готовности часто используется классификация систем по уровню надёжности, показанная в табл. 1.

Таблица 1: Классификация систем по уровню надёжности

K_a	**Тип системы**
0.99	Обычная (Conventional)
0.999	Высокой надёжности (High availability)
0.9999	Отказоустойчивая (Fault resilient)
0.99999	Безотказная (Fault tolerant)

Опр. 25. ***(мгновенный) Коэффициент неготовности / (instantaneous) Unavailability factor*** **:** Вероятность того, что объект в данный момент времени находится в неработоспособном состоянии, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается.

Примечание: В некоторых случаях выделяют проектный коэффициент неготовности, определяемый при проектировании для идеальных условий эксплуатации, технического обслуживания и ремонта, и коэффициент эксплуатационной неготовности, определяемый для реальных условий эксплуатации, технического обслуживания и ремонта. Отношение эксплуатационного коэффициента неготовности к проектному характеризует использование объекта по его назначению.

Иногда [2], в качестве частного случая коэффициента неготовности выделяют коэффициент вынужденного простоя, под которым подразумевают отношение времени восстановления к сумме времён наработки на отказ и времени восстановления, взятых за один и тот же календарный срок

$$K_r = \frac{MTTR}{MTTF + MTTR}. \tag{13}$$

Очевидно, что коэффициент вынужденного простоя связан с коэффициентом готовности следующим образом:

$$K_r = 1 - K_a. \tag{14}$$

Опр. 26. ***Коэффициент оперативной готовности / Operational availability factor*** **:** Вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в данный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, и начиная с этого момента будет работать безотказно в течение заданного периода времени.

Коэффициент оперативной готовности $K_{\text{оп.а}}$ характеризует надёжность объекта, необходимость применения которого возникает в произвольный момент времени, после которого требуется безотказная работа в течение заданной продолжительности времени.

$$K_{\text{оп.а}} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \cdot P(t_x, t), \tag{15}$$

где $P(t_x, t)$ — условная вероятность безотказной работы системы на интервале $[t_x, t_x + t]$ при условии, что в момент t_x система была работоспособна.

Опр. 27. ***Коэффициент технического использования / Total availability factor, utilization factor*** **:** Отношение математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период.

Коэффициент технического использования характеризует долю времени пребывания объекта в работоспособном состоянии относительно общей продолжительности эксплуатации.

Пусть T_p — время простоя системы, обусловленное выполнением планового технического обслуживания и ремонта, пересчитанное на один отказ. Тогда коэффициент технического использования $K_{\text{tot.a}}$ определяется следующим отношением

$$K_{\text{tot.a}} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR + T_p}. \tag{16}$$

Опр. 28. ***Коэффициент сохранения эффективности / Efficiency ratio*** **:** Отношение значения показателя эффективности использования объекта по назначению за определённую продолжительность эксплуатации к номинальному значению этого показателя, вычисленному при условии, что отказы объекта в течение того же периода не возникают.

Примечание: Для каждого типа объектов понятия эффективности и показателя эффективности устанавливают в документации на объект.

Коэффициент сохранения эффективности характеризует степень влияния отказов на эффективность его применения по назначению. Для каждого конкретного типа объектов содержание понятия эффективности и точный смысл показателя (показателей) эффективности устанавливают в техническом задании и вводят в нормативно-техническую и (или) конструкторскую (проектную) документацию.

5 Об использовании различных показателей надёжности

1. Если время восстановления восстанавливаемого объекта мало по сравнению с временем безотказной работы целесообразно использовать показатели надёжности $\omega(t)$ и $MTTF$, когда $\omega(t) = \text{const}$. Это особенно важно для ИС ответственного применения, отказ которых влечёт за собой тяжёлые последствия даже в условиях высокой скорости восстановления.

2. Если существенное значение имеет полезное время работы восстанавливаемого объекта, в качестве показателя надёжности целесообразно использовать коэффициент готовности K_a. Этот показатель широко применяется для универсальных систем, где существенное значение имеют потери машинного времени.

3. Если важное значение имеет безотказная работа в периоды выполнения операции, то как показатель надёжности применяется коэффициент оперативной готовности $K_{\text{op.a}}$.

6 Аналитический расчёт надёжности восстанавливаемых систем

Основной задачей расчёта надёжности проектируемых ИС является построение математических моделей адекватных вероятностным процессам их функционирования. Эти модели позволяют оценить степень удовлетворения требований по надёжности к проектируемым или эксплуатируемым системам.

Вид математической модели определяет возможность получения расчётных формул. Для проведения расчёта надёжности восстанавливаемых резервированных и нерезервированных систем используются следующие методы: метод интегральных уравнений, метод дифференциальных уравнений, метод переходных интенсивностей, метод оценки надёжности по графу возможных состояний и др.

6.1 Метод интегральных уравнений

Метод интегральных уравнений является наиболее общим, его можно применять при расчёте надёжности любых (восстанавливаемых и невосстанавливаемых) систем при любых распределениях ВБР и времени восстановления.

В этом случае для определения показателей надёжности системы составляют и решают интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, связывающие характеристики распределения ВБР, а для восстанавливаемых систем — и время восстановления элементов.

В ходе составления интегральных уравнений обычно выделяют один или несколько бесконечно малых интервалов времени, для которых рассматривают сложные события, проявляющие при совместном действии нескольких факторов. В общем случае решения находят численными методами с помощью компьютера. Метод интегральных уравнений не получил широкого распространения из-за высокой трудоёмкости решения.

6.1.1 Пример: одиночный восстанавливаемый объект

Постановка задачи. Имеется объект с произвольными функциями распределения времени безотказной работы $F(t)$ и времени восстановления $G(t)$. Переключения между работоспособным и неработоспособным состояниями предполагаются мгновенными. Требуется найти нестационарный коэффициент готовности $K_a(t)$ — вероятность того, что объект работает в произвольный момент времени t.

Решение. Полный цикл функционирования объекта включает два этапа: «работа + восстановление». Определяется функция распределения времени

полного цикла объекта

$$H(t) = \int_0^t G(t-\tau)\,\mathrm{d}F(\tau). \tag{17}$$

Основным уравнением теории восстановления при этом является уравнение Вольтерры II рода

$$K_a(t) = 1 - F(t) + \int_0^t K_a(t-\tau)\,\mathrm{d}H(\tau), \tag{18}$$

где $P(t) = 1 - F(t)$ — ВБР объекта.

Сложность уравнения (18) состоит в том, что искомая функция $K_a(t)$ стоит как вне, так и под знаком интеграла. Также важно, что предел интегрирования t в (18) является переменным (что является характерным признаком уравнений Вольтеры в отличии от уравнений Фредгольма, где пределы интегрирования постоянны). Существует три основных подхода к решению уравнений вида (18).

1. Аналитический (операционный): применение преобразования Лапласа — Стилтьеса.

2. Асимптотический: использование ключевой теоремы теории восстановления для нахождения установившейся готовности при $t \to \infty$ (стационарного коэффициента готовности):

$$K_a = \frac{\int_0^\infty (1 - F(t))\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty (1 - F(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty (1 - G(t))\,\mathrm{d}t}. \tag{19}$$

3. Численный: методы квадратур или дискретизация интеграла по шагам времени (конечно-разностные схемы).

Рассмотрим частный случай экспоненциальных распределений. Пусть ВБР $P(t)$ и вероятность того, что восстановление ещё не завершено, имеют аналогичный вид: $e^{-\lambda t}$ и $e^{-\mu t}$, соответственно. Тогда необходимые функции распределения равны

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad G(t) = 1 - e^{-\mu t}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (17), приходим к интегралу

$$H(t) = \int_0^t (1 - e^{-\mu(t-\tau)})\,\lambda e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

Интегрируя, получаем

$$H(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t} \frac{1 - e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda - \mu}. \tag{22}$$

Приводя подобные слагаемые, окончательно имеем:

$$H(t) = 1 + \frac{\mu}{\lambda - \mu} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \lambda e^{-\mu t}. \tag{23}$$

Также для последующих расчётов потребуется плотность распределения времени полного цикла

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} \left(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t} \right). \tag{24}$$

Уравнение Вольтеры (18) через плотность $h(t)$ принимает вид уравнения свёртки (поскольку $\mathrm{d}H(t) = h(t)\mathrm{d}t$):

$$K_a(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t K_a(t - \tau)\, h(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{25}$$

Применяем преобразование Лапласа $\mathcal{L}\{K_a(t)\} = \widetilde{K}_a(s)$ к обеим частям этого уравнения. По теореме о свёртке интеграл переходит в произведение изображений:

$$\widetilde{K}_a(s) = \frac{1}{s + \lambda} + \widetilde{K}_a(s)\widetilde{h}(s). \tag{26}$$

Здесь использован известный из операционного исчисления факт о том, что образом экспоненты является дробь

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s + a}. \tag{27}$$

Пользуясь этим же фактом, находим изображение плотности $\widetilde{h}(s)$:

$$\widetilde{h}(s) = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} \left(\frac{1}{s + \mu} - \frac{1}{s + \lambda} \right) = \frac{\lambda\mu}{(s + \mu)(s + \lambda)}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26), получаем

$$\widetilde{K}_a(s) = \frac{1}{s + \lambda} + \widetilde{K}_a(s) \frac{\lambda\mu}{(s + \mu)(s + \lambda)}. \tag{29}$$

Выражаем отсюда образ $\widetilde{K}_a(s)$

$$\widetilde{K}_a(s) = \frac{1}{s + \lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda\mu}{(s + \mu)(s + \lambda)} \right]^{-1} = \frac{s + \mu}{s(s + \mu + \lambda)}. \tag{30}$$

Разлагаем получившееся выражение на простейшие дроби

$$\widetilde{K}_a(s) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s+\lambda+\mu}. \tag{31}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем мгновенный коэффициент готовности:

$$\boxed{K_a(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}.} \tag{32}$$

На последнем этапе расчёта был использован тот факт, что

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{33}$$

Для определения стационарного коэффициента готовности в рассматриваемом частном случае экспоненциальных распределений можно использовать два способа: общую теорему (19) и, что более просто, уже полученный аналитический результат (32). Первый способ сводится к подстановке в отношение (19) функций распределения (20), что сразу приводит к ответу:

$$K_a = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}. \tag{34}$$

Второй способ состоит в вычислении предела

$$K_a = \lim_{t\to\infty} K_a(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}\right] = \frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{35}$$

Деля числитель и знаменатель последней дроби на $\mu\lambda$, несложно убедиться в том, что оба результата (34) и (35) совпадают. Отметим также, что полученный нами результат (34) совпадает с определением среднего коэффициента готовности (10), что связано с тем фактом, что выбраны именно экспоненциальные распределения[2].

6.2 Метод дифференциальных уравнений

Метод применяется для оценки надёжности восстанавливаемых объектов и основан на допущении о показательных распределениях времени между отказами (наработки) и времени восстановления. При этом параметр потока отказов

$$\omega = \lambda = \frac{1}{MTTF}, \tag{36}$$

а интенсивность восстановления

$$\mu = \frac{1}{MTTR}. \tag{37}$$

[2]В общем случае стационарный K_a может не совпадать со средним K_a.

Для применения метода необходимо иметь математическую модель для множества возможных состояний системы $S = \{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, в которых она может находиться при отказах и восстановлениях системы. Время от времени система S скачком переходит из одного состояния в другое под действием отказов и восстановлений её отдельных элементов.

При анализе поведения системы во времени в процессе износа удобно пользоваться графом состояний. Граф состояний — это направленный граф, где вершины обозначают возможные состояния системы. Он содержит столько вершин, сколько различных состояний возможно у объекта или системы. Рёбра графа отражают возможные переходы из некоторого состояния во все остальные с параметрами интенсивностей отказов и восстановлений (около стрелок показаны интенсивности переходов).

Каждой комбинации работоспособных и неработоспособных состояний подсистем соответствует одно состояние системы. Число состояний системы $n = 2^k$, где k — количество подсистем (элементов).

Связь между вероятностями нахождения системы во всех её возможных состояниях выражается системой дифференциальных уравнений Колмогорова (уравнений первого порядка). Структура этих уравнений определяется следующими правилами.

1. В левой части каждого уравнения записывается производная вероятности нахождения объекта в рассматриваемом состоянии (вершине графа), а правая часть содержит столько членов, сколько рёбер графа состояний связано с этой вершиной.

2. Если ребро направлено из данной вершины, соответствующий член имеет знак минус, если в данную вершину — знак плюс.

3. Каждый член равен произведению параметра интенсивности отказа (восстановления), связанного с данным ребром, на вероятность нахождения в той вершине графа, из которой исходит ребро.

4. Система уравнений Колмогорова включает столько уравнений, сколько вершин в графе состояний объекта.

5. Система дифференциальных уравнений дополняется нормировочным условием:
$$\sum_{j=0}^{n} P_j(t) = 1, \tag{38}$$
где $P_j(t)$ — вероятность нахождения системы в j-м состоянии, а n — число возможных состояний системы.

Решение системы уравнений Колмогорова при конкретных условиях даёт значение искомых вероятностей $P_j(t)$. Все множество возможных состояний системы разбивается на две части: подмножество состояний n_1, в которых система работоспособна, и подмножество состояний n_2, в которых система

неработоспособна. Нестационарный коэффициент готовности системы при этом определяется суммой:

$$K_a(t) = \sum_{j=0}^{n_1} P_j(t), \tag{39}$$

где $P_j(t)$ — вероятность нахождения системы в j работоспособном состоянии; n_1 — число состояний в которых система работоспособна.

Когда необходимо вычислить стационарный коэффициент готовности системы, рассматривают установившийся режим эксплуатации при $t \to \infty$. При этом все производные $\dot{P}_j(t) = 0$ и система дифференциальных уравнений переходят в систему алгебраических уравнений, которые легко решаются.

Пример графа состояний нерезервированной восстанавливаемой системы с n элементами приведён на рис. 2.

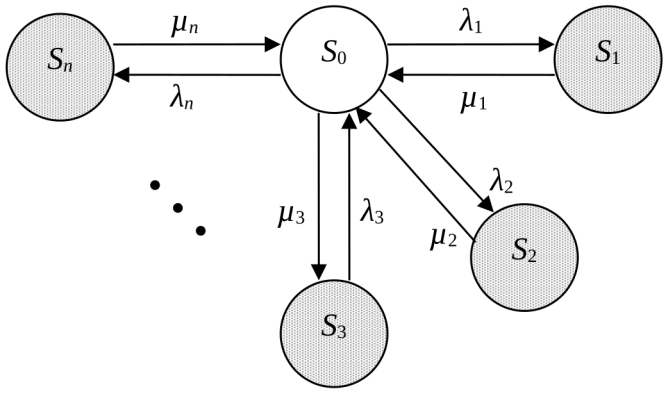


Рис. 2: Граф состояний восстанавливаемой системы при предположении пренебрежимо малой вероятности одновременного появления двух и более неработоспособных элементов

По графу состояний (рис. 2) составляют систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_1(t) &= \lambda_1 P_0(t) - \mu_1 P_1(t), \\
&\vdots \\
\dot{P}_n(t) &= \lambda_n P_0(t) - \mu_n P_n(t), \\
\dot{P}_0(t) &= \sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_0(t).
\end{aligned} \tag{40}$$

Данную систему уравнений решают с учётом нормировочного условия (38) при следующих начальных условиях:

$$P_0(0) = 1, \quad P_j(0) = 0, \, \forall j = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

В установившемся режиме эксплуатации (при $t \to \infty$) имеем:

$$\begin{gathered} \lambda_1 P_0 - \mu_1 P_1 = 0, \\ \vdots \\ \lambda_n P_0 - \mu_n P_n = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_0 = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Решив полученную систему алгебраических уравнений с учётом нормировочного условия, находим стационарные показатели надёжности.

7 Контрольные вопросы и задания

1.

Список литературы

1. ГОСТ Р 27.102-2021. Надёжность в технике. Надёжность объекта. Термины и определения. — Москва, 2021.
2. *Расулова С. С.* Надёжность информационных систем. — Ташкент : Ташкентский университет информационных технологий, 2007. — С. 118.