

Особенности FDTD-моделирования отражения и прохождения ЭМ сигналов на плоской границе раздела

П. А. Макаров, В. И. Щеглов



32 годичная сессия учёного совета СГУ им. Питирима Сорокина
Февральские чтения
Национальная конференция

20 февраля 2025 г.

1. Введение
2. Основы метода FDTD
3. Граничные условия
4. Коэффициенты отражения и прохождения
5. Заключение

Введение

Актуальность исследования

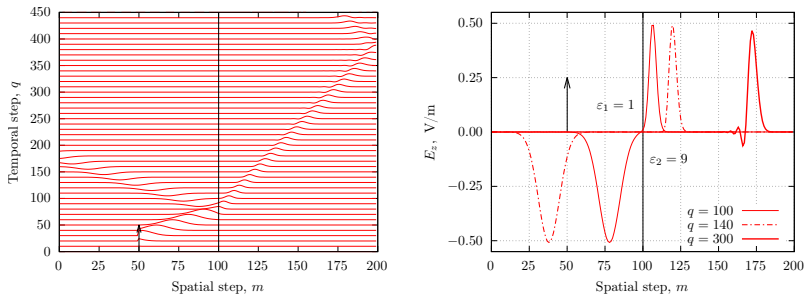


Рис. 1: Особенности FDTD-моделирования динамики ЭМВ на плоской границе раздела двух диэлектриков

Цель

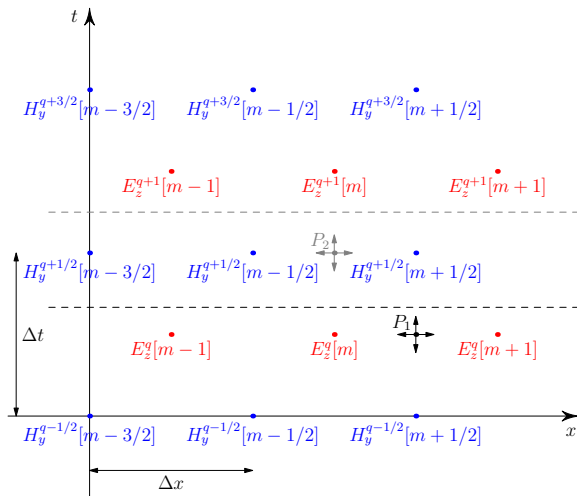
Исследование особенностей метода FDTD, возникающих при моделировании динамики электромагнитных сигналов на плоской границе раздела двух сред.

Задачи

- ▶ Выбор модели плоской границы раздела и получение в рамках неё соответствующих граничных условий;
- ▶ Определение из данных условий коэффициентов отражения и прохождения;
- ▶ Анализ полученных величин и исследование границ применимости рассматриваемого метода моделирования.

Основы метода FDTD

Алгоритм Йи и число Куранта



$$S_c = \frac{c\Delta t}{\Delta x}. \quad (1)$$

Рис. 2: Сетка Йи

Основы метода FDTD

Коррекция численной дисперсии и оптимальный выбор числа Куранта

Утверждение 1

При любых ε_{Γ} и μ_{Γ} , принадлежащих области определения

$$\varepsilon_{\Gamma}, \mu_{\Gamma} \in \mathbb{R} \mid \varepsilon_{\Gamma}\mu_{\Gamma} > 0. \quad (2)$$

вычислительные ошибки, связанные с численной дисперсией метода FDTD, можно устранить задавая число Куранта равным

$$S_c = \sqrt{\varepsilon_{\Gamma}\mu_{\Gamma}}. \quad (3)$$

Фиксация числа Куранта в форме (3) является единственно возможным оптимальным выбором в случае однородной недиспергирующей среды.

Полностью ли такой выбор числа Куранта устраняет вычислительные ошибки?

Граничные условия

Геометрия задачи и первое граничное условие

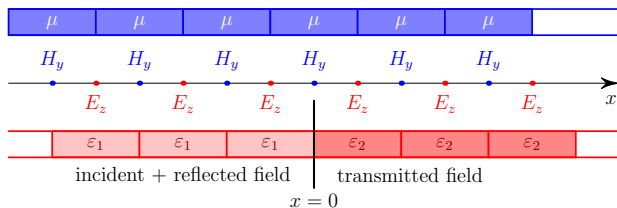


Рис. 3: Геометрия плоской границы раздела двух сред

Условие сохранения тангенциальной компоненты МП

$$-\frac{1}{\eta_1} + \frac{\widehat{r}}{\eta_1} = -\frac{\widehat{t}}{\eta_2}. \quad (4)$$

Граничные условия

Второе граничное условие

FDTD-аналог условия для касательной компоненты ЭП

$$e^{i\tilde{\beta}_1\Delta x/2} + \tilde{r}e^{-i\tilde{\beta}_1\Delta x/2} = \left(e^{-i\tilde{\beta}_2\Delta x/2} + i\frac{\Omega\mu\Delta x}{\eta_2} \right) \tilde{t}. \quad (5)$$

Вспомогательные обозначения

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \Omega = \frac{2}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (6)$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Решение системы (4)–(5) в сравнении с точным результатом

FDTD-расчёт

$$\widehat{t} = \frac{2\eta_2 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\eta_2 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \eta_1 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}, \quad (7)$$

$$\widehat{r} = \frac{\eta_2 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \eta_1 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\eta_2 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \eta_1 \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}. \quad (8)$$

Точный результат

$$\widehat{t} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \widehat{r} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (9)$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Влияние дискретизации на точность определения коэффициента отражения

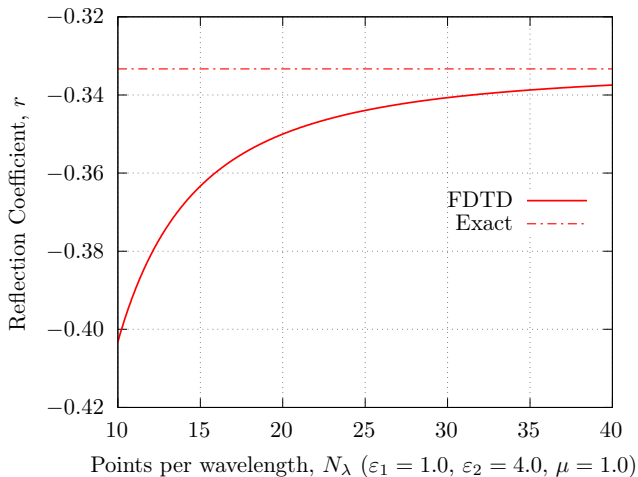


Рис. 4: Характер зависимости $\tilde{r}(N_\lambda)$

Коэффициенты отражения и прохождения

Сравнение FDTD-расчёта с точными результатами

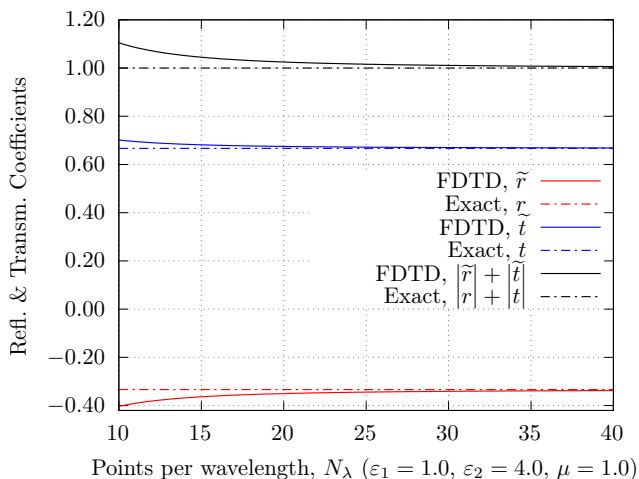


Рис. 5: Коэффициенты отражения и прохождения как функции N_λ

Коэффициенты отражения и прохождения

Влияние на результаты FDTD-расчёта магнитной проницаемости μ

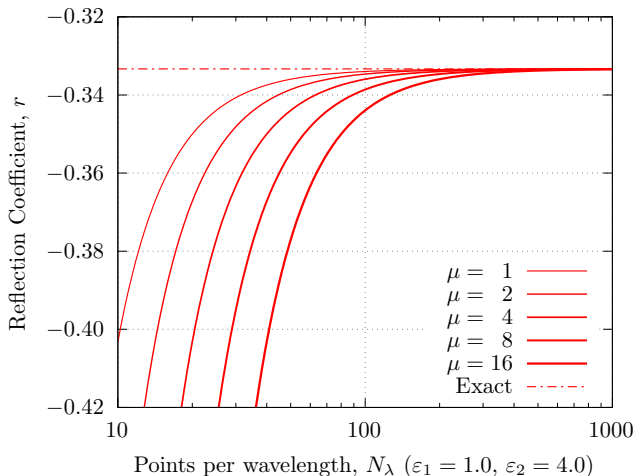


Рис. 6: Семейство кривых $\tilde{r}(N_\lambda)$ при различных μ

Коэффициенты отражения и прохождения

Коэффициент отражения в области малых значений N_λ

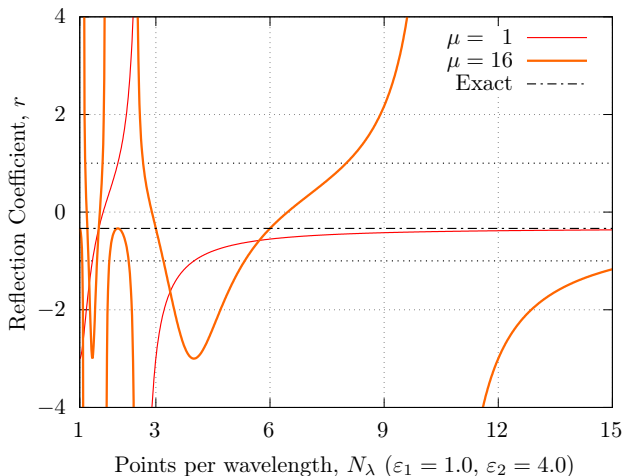


Рис. 7: Зависимости $\tilde{r}(N_\lambda)$ при малых N_λ

Коэффициенты отражения и прохождения

Моделирование “короткого” синусоидального импульса на границе раздела

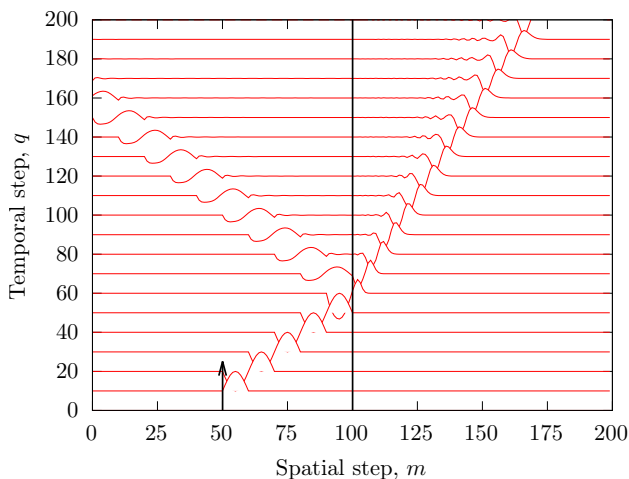


Рис. 8: $\mu = 1$, $S_c = 1$, $N_\lambda = 20$

Коэффициенты отражения и прохождения

Моделирование “короткого” синусоидального импульса на границе раздела

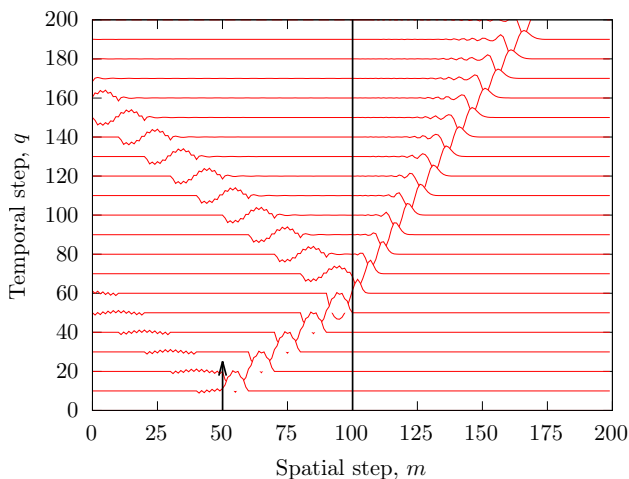


Рис. 9: $\mu = 16$, $S_c = 4$, $N_\lambda = 80$

Коэффициенты отражения и прохождения

Моделирование “короткого” синусоидального импульса на границе раздела

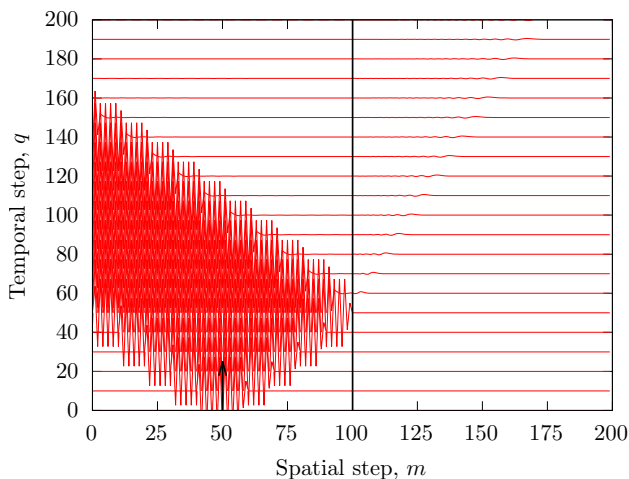


Рис. 10: $\mu = 16$, $S_c = 4$, $N_\lambda = 6$

Коэффициенты отражения и прохождения

Открытые вопросы и направления дальнейших исследований

1. В чём причина несовпадения численных результатов, показанных на рис. 4, с данными других исследователей?
2. Проверить справедливость формул (7)–(8) в случае непрозрачности граничащих сред.
3. Улучшить рис. 5, проведя исследование $\delta_r = \tilde{r}/r$ и $\delta_t = \tilde{t}/t$.
4. Что произойдёт с рис. 5, если рассмотреть выход волны из диэлектрика в вакуум (т. е. $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$)?
5. В чём причина точного совпадения $\tilde{r} = r$ на рис. 7 при значениях $N_\lambda = 2, 3, 6$ для $\mu = 16$?
6. Что можно сказать о случаях $\varepsilon_T < 1$ и/или $\mu_T < 1$?
7. Что произойдёт со всеми рассматриваемыми здесь вопросами при рассмотрении границы раздела двух магнетиков?
8. Как изменится всё, что здесь обсуждается, если среды будут отличаться одновременно и диэлектрическими, и магнитными проницаемостями?

Заключение

- ▶ В рамках выбранной модели плоской границы раздела двух сред получены FDTD-аналоги граничных условий.
- ▶ Определены коэффициенты отражения и прохождения рассматриваемой системы.
- ▶ Выполнен анализ полученных величин и сравнение их с точными аналитическими результатами. Исследованы границы применимости рассматриваемого метода моделирования.
- ▶ Сформулированы вопросы и направления работы для следующих исследований.

Спасибо за внимание!

Update Equations

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + \frac{S_c}{\eta\mu_r} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (10)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}[m] + \frac{S_c\eta}{\varepsilon_r} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right). \quad (11)$$

Total Field / Scattered Field

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[s - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[s - \frac{1}{2} \right] - \frac{S_c}{\eta\mu_r} E_z^{\text{inc}} [0, q], \quad (12)$$

$$E_z^{q+1}[s] = E_z^q[s] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} E_z^{\text{inc}} \left[-\frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right]. \quad (13)$$

Advection Equations

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

FDTD-реализация второго порядка точности

Левая граница

$$\begin{aligned} E_z^{q+1}[0] = & -\frac{1}{1/S'_c + 2 + S'_c} \left\{ (1/S'_c - 2 + S'_c)(E_z^{q+1}[2] + E_z^{q-1}[0]) + \right. \\ & + 2(S'_c - 1/S'_c)(E_z^q[0] + E_z^q[2] - E_z^{q+1}[1] - E_z^{q-1}[1]) - \\ & \left. - 4(S'_c + 1/S'_c)E_z^q[1] \right\} - E_z^{q-1}[2], \end{aligned} \quad (15)$$

$$S'_c = \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu \Gamma}}. \quad (16)$$