

Кинематический анализ углов вылета частиц, рождённых в реакциях распада

П. А. Макаров

VII Всероссийская научная конференция
«Математическое моделирование и информационные технологии»



23–24 ноября 2023 г.

Содержание

1. Введение
2. Нерелятивистский случай
3. Релятивистский случай
4. Обсуждение основных результатов
5. Заключение

Введение

Цели и задачи

Цель

Кинематическое исследование закономерностей направления вылета нерелятивистских и релятивистских дочерних частиц, рождённых в процессе распада.

Задачи

- ▶ Сформулировать и доказать теоремы, описывающие кинематику реакций распада в нерелятивистском и релятивистском случаях.
- ▶ Получить и проанализировать условия, позволяющие определять максимальные углы вылета рождённых частиц, наблюдаемые в l -системе.
- ▶ Определить связь между углами вылета частиц в c -системе и соответствующими им углами, регистрируемыми в l -системе. Исследовать характерные особенности данной связи.

Введение

Определение распада и примеры

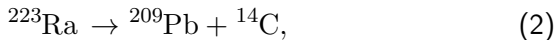
Определение 1

Распад — это процесс спонтанного превращения исходного ядра или частицы (называемых родительскими или материнскими) в несколько продуктов распада (порождённые или дочерние частицы).

Рассмотрим распад материнской частицы с образованием только двух дочерних частиц, протекающий по схеме:

$$a_0 \rightarrow a_1 + a_2. \quad (1)$$

Примеры



$$H \rightarrow Z + \gamma. \quad (3)$$

Введение

Основные соглашения и обозначения

Полная энергия i -й частицы

$$E_i = W_i + T_i. \quad (4)$$

Системы отсчёта

- ▶ система отсчёта, связанная с лабораторией ($л$ -система: масса m , энергия E , полярный угол θ , скорость \mathbf{v} , импульс \mathbf{p} и т. п.);
- ▶ система центра инерции ($ц$ -система: m , E^* , \mathbf{v}^* , \mathbf{p}^*).

Система единиц

Стандартная в КТП и ФЧ система единиц $\hbar = c = 1$.

Нерелятивистский случай

Законы сохранения для реакции (1) в ζ -системе

Закон сохранения энергии

$$W_0^* = E_1^* + E_2^*. \quad (5)$$

Закон сохранения импульса

$$p_1^* = m_1 v_1^* = p_2^* = m_2 v_2^* = p^*. \quad (6)$$

Нерелятивистский случай

Связь скорости дочерней частицы с направлением её вылета в l -системе

Утверждение 1

Пусть в l -системе материнская частица движется со скоростью \mathbf{v}_0 . В этой же системе исследуемая дочерняя частица движется со скоростью \mathbf{v}_1 , а в ζ -системе ей соответствует скорость \mathbf{v}_1^* . Тогда зависимость скорости дочерней частицы от направления её вылета в l -системе определяется согласно уравнению

$$\boxed{v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1 \cos \theta = (v_1^*)^2.} \quad (7)$$

Доказательство.

Результат (7) непосредственно следует из теоремы о сложении скоростей $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^*$ и теоремы косинусов. \square

Нерелятивистский случай

Графическое представление содержания утверждения 1

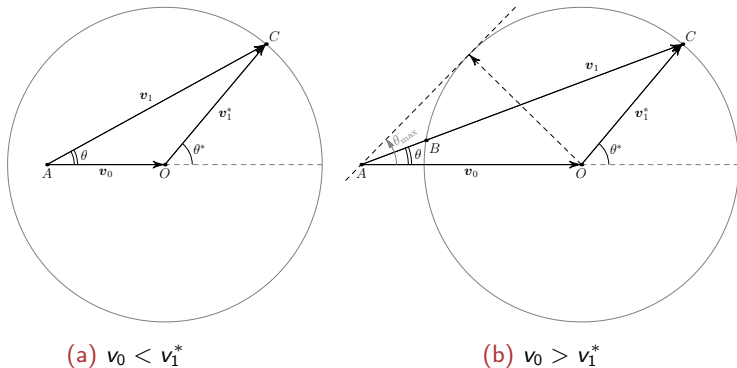


Рис. 1: Диаграммы скоростей для распада нерелятивистской частицы

Нерелятивистский случай

Направления вылета дочерней частицы в l -системе

Следствие 1

Утверждение 1 приводит к возможности реализации двух ситуаций.

1. Скорость материнской частицы меньше собственной скорости дочерней частицы $v_0 < v_1^*$ (см. рис. 1a). В этом случае дочерняя частица может вылететь под любым углом $\theta \in [0, 2\pi]$.
2. Скорость первичной частицы больше собственной скорости вторичной частицы $v_0 > v_1^*$ (см. рис. 1b). При этом из рис. 1b видно, что независимо от угла θ^* частица в l -системе может вылететь только вперед, под углом $\theta \in [0, \theta_{\max}]$, где максимальный угол θ_{\max} определяется равенством

$$\sin \theta_{\max} = \frac{v_1^*}{v_0}. \quad (8)$$

Доказательство.

Очевидно из анализа рис. 1.



Нерелятивистский случай

Связь углов вылета дочерней частицы в l - и c -системах

Следствие 2

Связь между углами вылета дочерней частицы θ и θ^* в l - и c -системах может быть записана в виде:

$$\cos \theta^* = -\frac{v_0}{v_1^*} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_1^*}\right)^2 \sin^2 \theta}. \quad (9)$$

Замечание 1

Как видно из рис. 1а для случая $v_1^* > v_0$ связь между θ^* и θ однозначна. При этом в (9) необходимо выбирать знак «+» перед корнем. Если $v_1^* < v_0$, то связь между θ^* и θ неоднозначна: каждому значению θ отвечают два значения θ^* (векторам \mathbf{v}^* , проведённым на рис. 1б из центра окружности в точки В или С отвечают два знака « \pm » перед корнем в уравнении (9)).

Нерелятивистский случай

Доказательство следствия 2

Доказательство.

Непосредственно из рис. 1 вытекает равенство

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_1^* \sin \theta^*}{v_1^* \cos \theta^* + v_0}. \quad (10)$$

Далее, выполняем серию преобразований

$$(v_1^* \cos \theta^* + v_0)^2 = (v_1^*)^2 (1 - \cos^2 \theta^*) \operatorname{ctg}^2 \theta. \quad (11)$$

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \cos^2 \theta^* + 2 \frac{v_0}{v_1^*} \cos \theta^* + \left(\frac{v_0}{v_1^*} \right)^2 - \operatorname{ctg}^2 \theta = 0. \quad (12)$$

Последнее равенство — есть квадратное уравнение относительно $\cos \theta^*$, корнями которого и является (9). □

Нерелятивистский случай

Связь углов вылета дочерней частицы в л- и ц-системах в случае $v_0 < v_1^*$

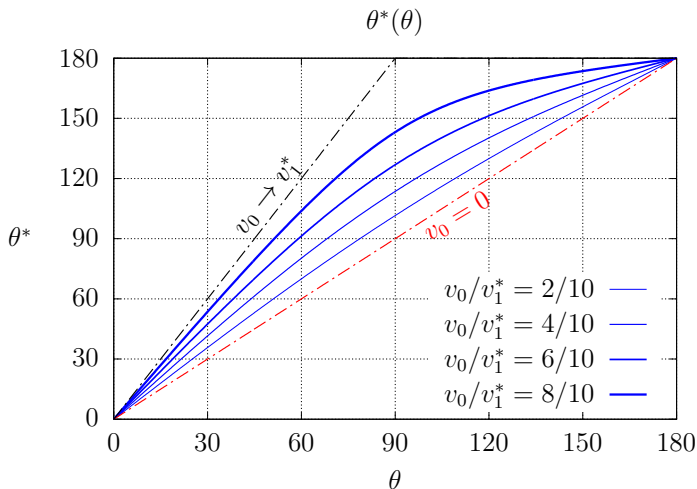


Рис. 2: Связь между θ^* и θ в случае $v_0 < v_1^*$

Нерелятивистский случай

Связь углов вылета дочерней частицы в l - и c -системах в случае $v_0 > v_1^*$

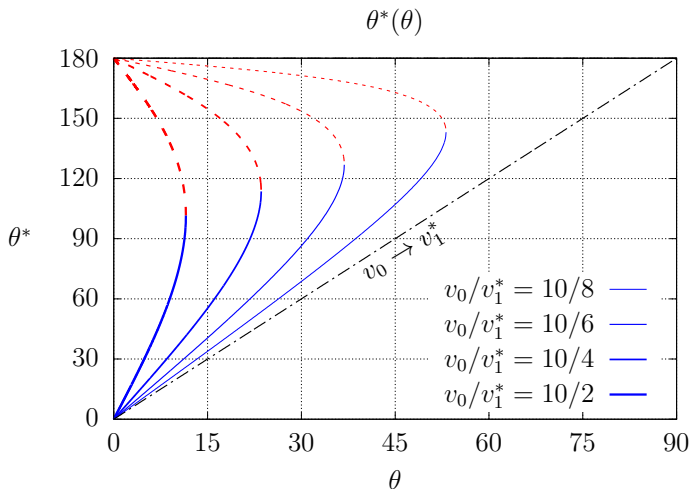


Рис. 3: Связь между θ^* и θ в случае $v_0 > v_1^*$

Нерелятивистский случай

Ограничение на θ^*

Следствие 3

Каковым бы ни был наблюдаемый в л-системе угол вылета θ вторичной частицы, в ц-системе ему могут соответствовать только значения $\theta^ \geq \theta$ (причём равенство имеет место только в тривиальном случае, когда распадается покоящаяся частица, а значит л- и ц-системы совпадают), но не $\theta^* < \theta$.*

Доказательство.

Очевидно из рис. 2 и 3.



Релятивистский случай

Сводка основных соотношений СТО

Релятивистский импульс и энергия

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (13)$$

Скорость и импульс релятивистской частицы

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}. \quad (14)$$

Связь энергии, импульса и массы

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (15)$$

Релятивистский случай

Законы сохранения для реакции (1) в л-системе

Закон сохранения энергии

$$E_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} = E_1 + E_2. \quad (16)$$

Закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_0 = \frac{m_0 \mathbf{v}_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (17)$$

Релятивистский случай

Направление вылета дочерней частицы в l -системе

Теорема 1

Пусть E_1^* — это энергия одной из дочерних частиц в $ц$ -системе, а E_1 и θ — её энергия и угол вылета (по отношению к \mathbf{v}_0) в l -системе. Тогда направление вылета θ искомой частицы определяется согласно уравнению

$$\cos \theta = \frac{E_1 - E_1^* \sqrt{1 - v_0^2}}{v_0 \sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \quad (18)$$

Релятивистский случай

Доказательство теоремы 1

Доказательство.

Запишем формулы преобразования Лоренца для рассматриваемой частицы при переходе от ζ - к λ -системе S

$$E_1 = \frac{E_1^* + v_0 p_{1x}^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1x} = \frac{p_{1x}^* + v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1y} = p_{1y}^*, \quad p_{1z} = p_{1z}^*. \quad (19)$$

Путём несложных преобразований выразим E_1^* из (19)

$$E_1^* = \frac{E_1 - v_0 p_1 \cos \theta}{\sqrt{1 - v_0^2}}. \quad (20)$$

Подставляя в последнее равенство p_1 согласно (15) и выражая $\cos \theta$ приходим окончательно к (18), что и доказывает теорему. \square

Релятивистский случай

Энергия дочерней частицы в л-системе

Теорема 2

Пусть для некой дочерней частицы известны её энергия E_1^* в ζ -системе и угол вылета θ (по отношению к скорости \mathbf{v}_0 материнской частицы) в l -системе. Тогда энергия E_1 данной дочерней частицы в l -системе определяется согласно уравнению

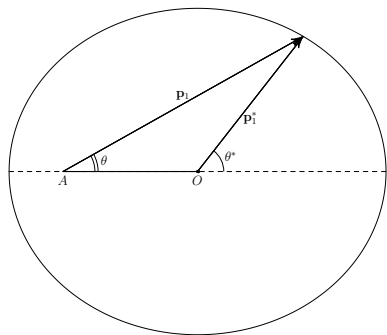
$$(1 - v_0^2 \cos^2 \theta) E_1^2 - 2E_1^* \sqrt{1 - v_0^2} E_1 + (1 - v_0^2)(E_1^*)^2 + m_1^2 v_0^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (21)$$

Доказательство.

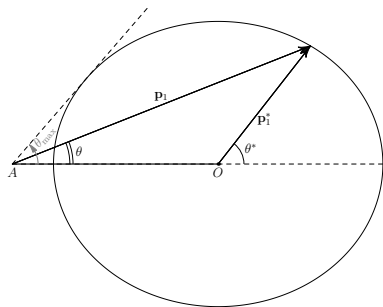
Для доказательства теоремы достаточно возвести в квадрат выражение (18), умножить результат на $v_0^2(E_1^2 - m_1^2)$ и выделить в яном виде множители при разных степенях E_1 . \square

Релятивистский случай

Графическое представление содержания теорем 1 и 2



(a) $v_0 < v_1^*$



(b) $v_0 > v_1^*$

Рис. 4: Диаграммы импульсов для распада релятивистской частицы

Релятивистский случай

Направления вылета дочерней частицы в л-системе

Следствие 4

Таким образом, теоремы 1 и 2 приводят к возможности двух ситуаций.

1. Скорость материнской частицы меньше собственной скорости дочерней частицы $v_0 < p_1^*/E_1^* = v_1^*$ (см. рис. 4a). В этом случае дочерняя частица может вылететь под любым углом $\theta \in [0, 2\pi]$.
2. Скорость материнской частицы больше собственной скорости дочерней частицы (т. е. $v_0 > v_1^*$). Тогда точка A на рис. 4b лежит вне эллипса, и при известном угле θ вектор \mathbf{p}_1 (а вместе с ним и энергия E_1) может иметь два различных значения. В этом случае из рис. 4b видно, что независимо от угла θ^* частица в л-системе может вылететь только вперед, под углом $\theta \in [0, \theta_{\max}]$, где максимальный угол θ_{\max} определяется равенством

$$\sin \theta_{\max} = \frac{p_1^* \sqrt{1 - v_0^2}}{m_1 v_0}. \quad (22)$$

Релятивистский случай

Доказательство следствия 4

Доказательство.

Очевидно из построения рис. 4 и его анализа. Результат (22) получается из условия обращения в нуль дискриминанта квадратного уравнения (21), записанного с учётом (15). □

Релятивистский случай

Связь углов вылета дочерней частицы в л- и ц-системах

Следствие 5

Связь между углами вылета дочерней частицы θ и θ^ в л- и ц-системах в релятивистском случае имеет вид:*

$$\cos \theta^* = -\frac{v_0}{v_1^* \sqrt{1 - v_0^2}} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{(v_1^*)^2 (1 - v_0^2)}} \sin^2 \theta. \quad (23)$$

Релятивистский случай

Доказательство следствия 5

Доказательство.

Проводится аналогично доказательству следствия 2, и может быть выполнено с помощью формальной замены

$$v_0 \rightarrow \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (24)$$

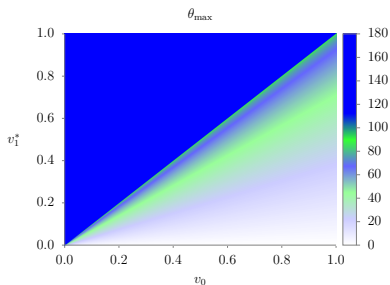
очевидной из геометрического построения на рис. 4, для которого

$$AO = \frac{v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (25)$$

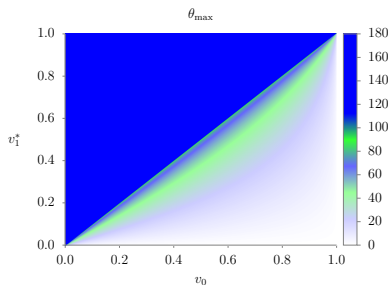
что вместе с соотношением между импульсом, энергией и скоростью свободной релятивистской частицы (14) окончательно приводит к результату (23). □

Обсуждение основных результатов

Сравнение результатов расчёта максимального угла вылета



(a) расчёт согласно (8)



(b) расчёт согласно (22)

Рис. 5: θ_{\max} как функция v_0 и v_1^*

Замечание 2

Схожесть областей $v_1^* > v_0$ на рис. 5а и 5б не означает равномерного распределения углов вылета дочерних частиц в л-системе.

Обсуждение основных результатов

Сравнение результатов расчёта θ_{\max} для двух частных случаев

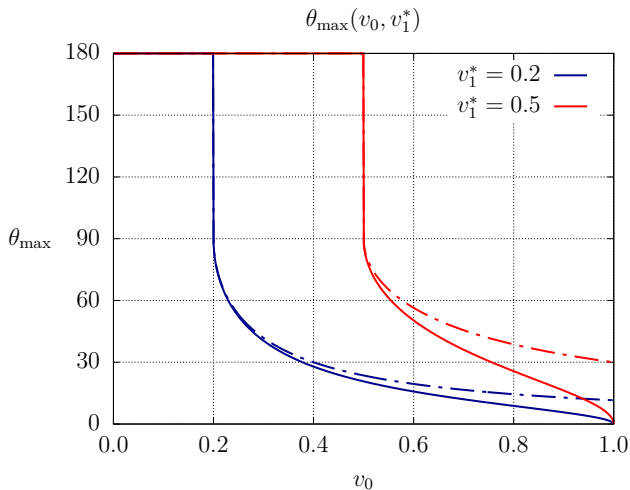


Рис. 6: Максимальный угол вылета дочерней частицы

Обсуждение основных результатов

Связь углов вылета дочерней частицы в л- и ц-системах в случае $v_0 < v_1^*$

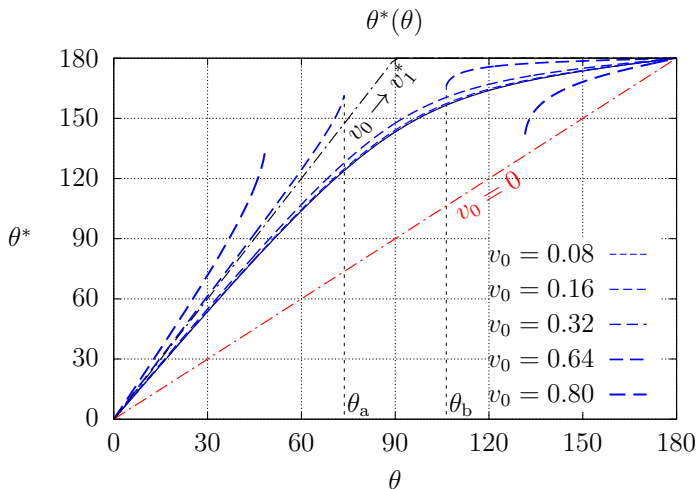


Рис. 7: Связь θ^* и θ в релятивистском случае для $v_0/v_1^* = 8/10$

Обсуждение основных результатов

Резюме для случая $v_0 < v_1^*$

1. Следствия 2 и 5 дают абсолютно идентичные результаты только в области существенно нерелятивистских скоростей $v \lesssim 0.1$.
2. В области сравнительно небольших скоростей $[0.1, v_{0c}]$ следствия 2 и 5 дают качественно совпадающие зависимости $\theta^*(\theta)$, несколько отличающиеся количественно.
3. Начиная с некоторой критической скорости v_{0c} материнской частицы, предсказания следствий 2 и 5 отличаются качественно.

Замечание 3

Величина критической скорости v_{0c} и отвечающий ей интервал “запрещённых углов” $[\theta_a, \theta_b]$ связаны неравенством

$$\frac{v_1^* \sqrt{1 - v_{0c}^2}}{v_{0c}} < \sin \theta_a, \quad (26)$$

вытекающим из условия отрицательности значений подкоренного выражения в (23). При этом $\theta_b = \pi - \theta_a$.

Обсуждение основных результатов

Связь углов вылета дочерней частицы в l - и c -системах в случае $v_0 > v_1^*$

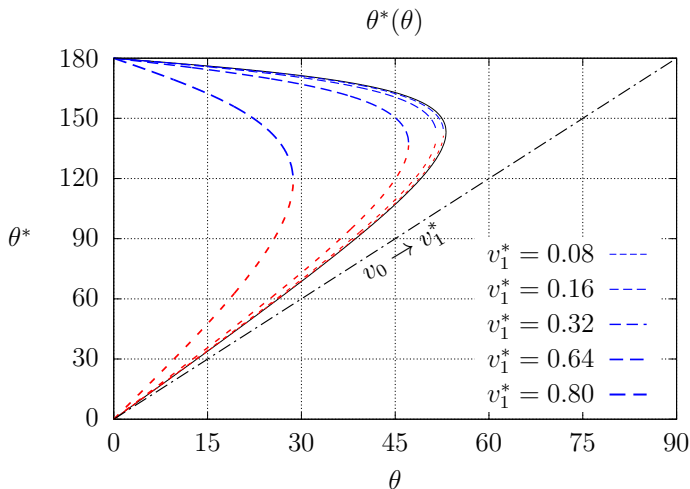


Рис. 8: Связь θ^* и θ в релятивистском случае при $v_0/v_1^* = 10/8$

Заключение

На основе кинематического подхода изучены некоторые особенности углов вылета дочерних частиц, рождённых в процессах распада.

1. Сформулированы и доказаны одно утверждение и две основные теоремы. Получены и проанализированы пять следствий из них.
2. Определены максимальные углы вылета рождённых частиц, наблюдаемые в l -системе.
3. Установлена связь между углами вылета частиц в c -системе и соответствующими им углами, регистрируемыми в l -системе.
4. Выяснено, что в случае $v_0 > v_1^*$ дочерние частицы в l -системе наблюдаются вылетевшими только в пределах узкого конуса с раствором, направленным по ходу движения материнской частицы.
5. Обнаружено, что в существенно релятивистской и ультрарелятивистской областях дочерние частицы в l -системе в случае $v_0 < v_1^*$ могут наблюдаться вылетающими в пределах двух конусов, направленных растворами по ходу и против хода движения материнской частицы.

Спасибо за внимание!

Приложение

Рассуждение для построения рис. 4

Согласно формулам преобразования Лоренца (19) компонента импульса дочерней частицы в l -системе выражается через величины, относящиеся к $ц$ -системе, следующим образом:

$$p_{1x} = \frac{p_1^* \cos \theta^* + v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1y} = p_1^* \sin \theta^*. \quad (27)$$

Исключая из последней системы θ^* , легко получить

$$p_{1y}^2 + \left(p_{1x} \sqrt{1 - v_0^2} - v_0 E_1^* \right)^2 = (p_1^*)^2. \quad (28)$$

По отношению к переменным p_{1x} , p_{1y} выражение (28) представляет собой уравнение эллипса с полуосями $p_1^*/\sqrt{1 - v_0^2}$, p_1^* и центром (точка O на рис. 4), смещённым на расстояние $v_0 E_1^*/\sqrt{1 - v_0^2}$ от точки $\mathbf{p}_1 = 0$ (точка A на рис. 4).