

Особенности FDTD-моделирования распространения возмущений в недиспергирующих однородных средах

П. А. Макаров, В. И. Щеглов

VIII Всероссийская научная конференция
«Математическое моделирование и информационные технологии»



28–29 ноября 2024 г.

1. Введение
2. Численная дисперсия метода FDTD
3. Связь численной дисперсии с числом Куранта
4. Заключение

Введение

Актуальность исследования

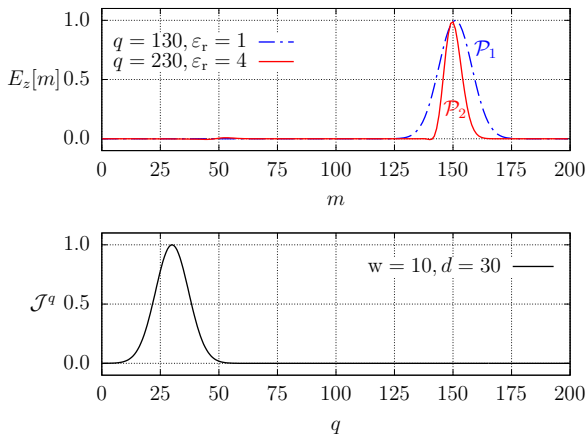


Рис. 1: “Стандартное” FDTD-моделирование распространения импульсов гауссова вида в вакууме \mathcal{P}_1 и диэлектрике \mathcal{P}_2 с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 4$ при $S_C = 1$

Введение

Цели и задачи

Цель

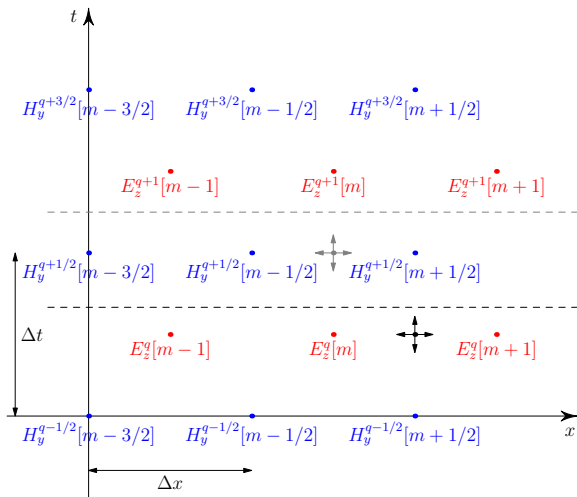
Рассмотрение численной дисперсии метода FDTD и оценка влияния выбора значений числа Куранта S_C на качество моделирования распространения сигналов в однородных недиспергирующих средах.

Задачи

- ▶ Анализ характера численной дисперсии при FDTD-моделировании распространения электромагнитных сигналов в недиспергирующих однородных средах;
- ▶ Определение оптимального значения числа Куранта, устраняющего численную дисперсию волновых пакетов;
- ▶ Исследование границ применимости разработанного метода моделирования.

Численная дисперсия метода FDTD

Сетка Йи и число Куранта



$$S_c = \frac{c\Delta t}{\Delta x}. \quad (1)$$

Рис. 2: Сетка Йи

Численная дисперсия метода FDTD

Дисперсионное соотношение

Утверждение 1

Отклонение фазовой скорости \tilde{c}_p волны в сетке \mathbb{Y} от соответствующего значения c_p в непрерывном случае может быть описано равенством

$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{\pi \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{N_\lambda \arcsin \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{S_c} \sin \left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda} \right) \right]}, \quad (2)$$

где N_λ — это число узлов пространственной сетки на длину волны в свободном пространстве

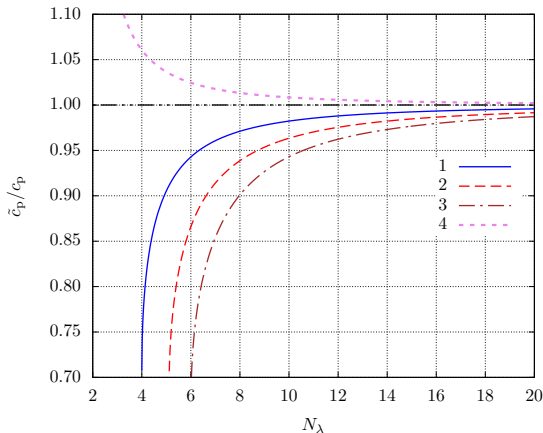
$$\lambda = N_\lambda \Delta_x. \quad (3)$$

Соотношение (2) имеет очевидный смысл на следующей области определения параметров:

$$N_\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \varepsilon_r, \mu_r, S_c \in (0, +\infty) \subset \mathbb{R}. \quad (4)$$

Численная дисперсия метода FDTD

Дисперсионные кривые



Кривая	n_r
1	$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{3}$
3	2
4	$1/\sqrt{2}$

Рис. 3: Зависимость (2) от параметра дискретизации N_λ для некоторых сред с относительными показателями преломления $n_r = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. Число Куранта $S_c = 1$

Численная дисперсия метода FDTD

Диаграмма полос пропускания сетки Йи

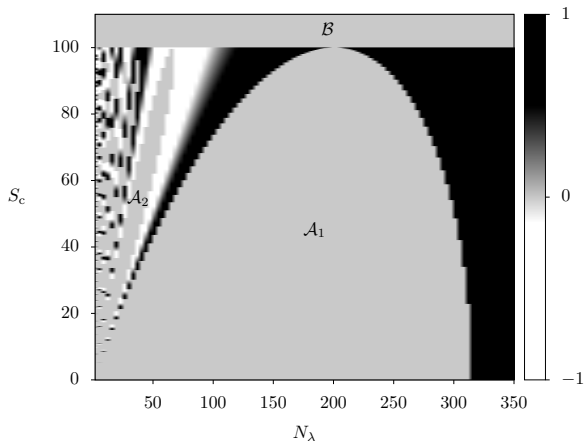


Рис. 4: (N_λ, S_c) -диаграмма полос пропускания сетки Йи при $n_r = 100$

Связь численной дисперсии с числом Куранта

Коррекция численной дисперсии и оптимальный выбор числа Куранта

Утверждение 2

При любых заданных ε_T и μ_T , принадлежащих области определения (4), всегда можно устранить вычислительные ошибки, связанные с численной дисперсией, задавая число Куранта равным

$$S_c = \sqrt{\varepsilon_T \mu_T}. \quad (5)$$

Задание числа Куранта в форме (5) является единственно возможным оптимальным выбором.

Связь численной дисперсии с числом Куранта

Примеры FDTD-моделирования при оптимальном выборе числа Куранта

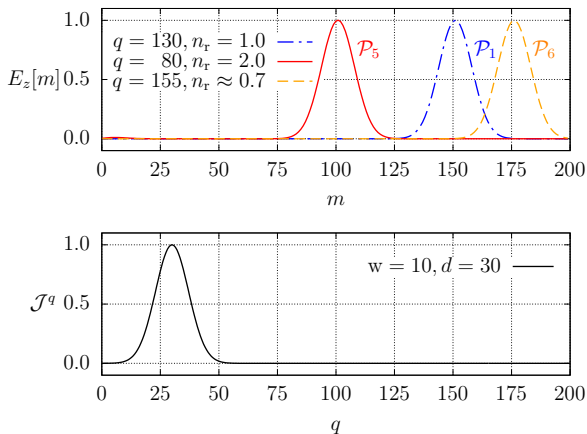


Рис. 5: Распространение гауссовых импульсов в средах, оптически более плотных \mathcal{P}_5 и менее плотных \mathcal{P}_6 вакуума, с применением коррекции программной дисперсии (5)

Связь численной дисперсии с числом Куранта

Расходимость численного решения при $S_c > n_T$

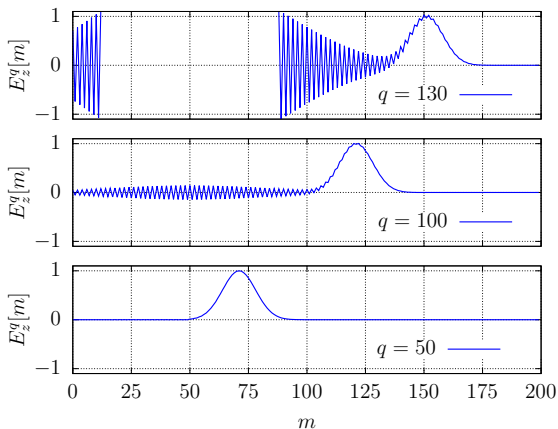
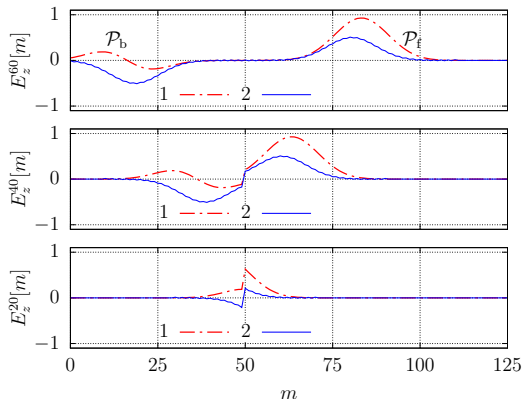


Рис. 6: Временная динамика разрушения численного решения, получаемого в процессе вычислений согласно алгоритму FDTD при $S_c - n_T = 10^{-3}$

Связь численной дисперсии с числом Куранта

Формирование обратного импульса в средах, оптически менее плотных вакуума

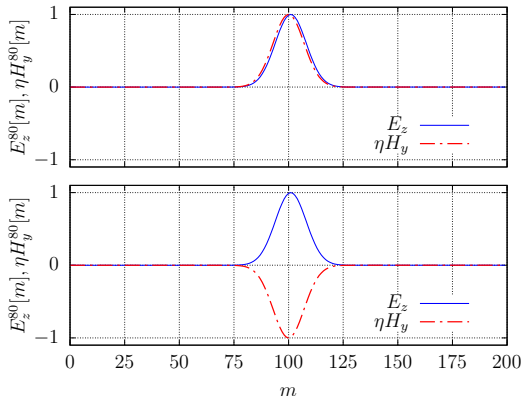


Кривая	n_T
1	10^{-1}
2	10^{-2}

Рис. 7: Динамика формирования прямого \mathcal{P}_f и обратного \mathcal{P}_b импульсов при моделировании распространения сигнала гауссовой формы в средах, оптически менее плотных, чем вакуум при оптимальном выборе (5).

Связь численной дисперсии с числом Куранта

Расширение области определения (4) на левые среды



$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) < 0,$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Рис. 8: Мгновенные снимки прямых (нижняя половина) и обратных (верхняя часть) волн, распространяющихся в сетке Йи

Заключение

- ▶ Исследовано явление численной дисперсии при FDTD-моделировании распространения электромагнитных сигналов в недиспергирующих однородных средах.
- ▶ Сформулированы несколько утверждений, определяющих характер этой дисперсии, а также описано влияние на неё числа Куранта.
- ▶ Определено оптимальное значение числа Куранта, устраняющее численную дисперсию волновых пакетов.
- ▶ Исследованы границы применимости разработанного метода моделирования, и впервые указано на возможность его применения для сред, оптически менее плотных, чем вакуум, а также для левых сред.

Спасибо за внимание!

Update Equations

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + \frac{S_c}{\eta\mu_r} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]), \quad (6)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \mathcal{J}^{q+\frac{1}{2}}[m] + \frac{S_c\eta}{\epsilon_r} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right). \quad (7)$$

TF/SF

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[s - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[s - \frac{1}{2} \right] - \frac{S_c}{\eta\mu_r} E_z^{\text{inc}} [0, q], \quad (8)$$

$$E_z^{q+1}[s] = E_z^q[s] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} E_z^{\text{inc}} \left[-\frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right]. \quad (9)$$