

# О некоторых понятиях и формулировках классической механики

Павел Макаров



Семинар 25 января 2023 г.

# Содержание

1. Мотивация
2. Структура классической механики
3. Переосмысление некоторых понятий
4. О некоторых формулировках
5. Заключение

## Вопрос 1

*Завершено ли построение классической механики? Есть ли в ней что-нибудь неисследованное? Зачем её изучать?*

## Вопрос 1

*Завершено ли построение классической механики? Есть ли в ней что-нибудь неисследованное? Зачем её изучать?*

## Две цитаты

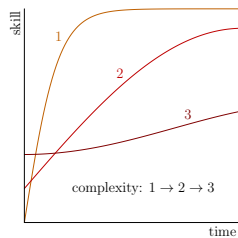
- ▶ *“Там, где кончаются сомнения, кончается наука.”*  
(П. Л. Капица);
- ▶ *“Наука — лучший способ удовлетворения личного любопытства за государственный счёт.”* (Л. А. Арцимович).

## Вопрос 2

*Проста ли классическая механика?*

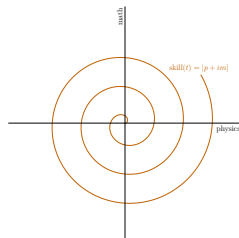
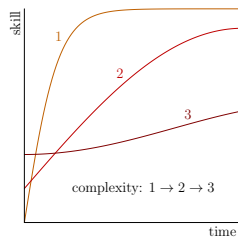
## Вопрос 2

*Проста ли классическая механика?*



## Вопрос 2

*Проста ли классическая механика?*



## Вопрос 2

*Проста ли классическая механика?*

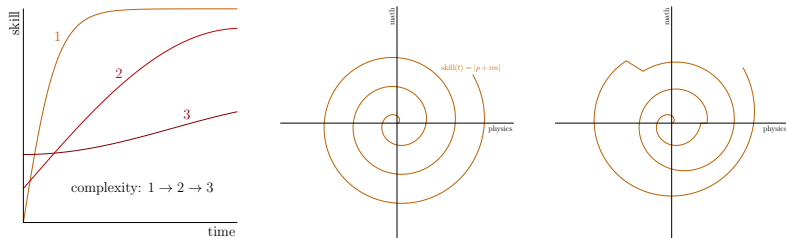


Рис. 1: Схематичное изображение "learning curves"



## Вопрос 3

*Механика — это часть физики или математики?*

## Вопрос 3

*Механика — это часть физики или математики?*



## Вопрос 3

*Механика — это часть физики или математики?*



## Вопрос 3

*Механика — это часть физики или математики?*



## Вопрос 3

*Механика — это часть физики или математики?*



- ▶ Аналитический курс;
- ▶ Геометрический курс.

## Основные языки механики

- ▶ Дифференциальные уравнения;
- ▶ Вариационное исчисление;
- ▶ Дифференциальная геометрия.

## Вопрос 3

*Механика — это часть физики или математики?*



- ▶ Аналитический курс;
- ▶ Геометрический курс.

## Основные языки механики

- ▶ Дифференциальные уравнения;
- ▶ Вариационное исчисление;
- ▶ Дифференциальная геометрия.

$$|\text{Mechanics}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle).$$

# Структура классической механики

## Основные разделы

- ▶ Кинематика;
- ▶ Динамика;
- ▶ Статика.

## Вопрос 4

*Где проходит граница между кинематикой и динамикой?*

# Структура классической механики

## Основные разделы

- ▶ Кинематика;
- ▶ Динамика;
- ▶ Статика.

## Вопрос 4

*Где проходит граница между кинематикой и динамикой?*

## Вопрос 5

*Что такое импульс? Это кинематическая или динамическая величина?*



# Структура классической механики

## Основные разделы

- ▶ Кинематика;
- ▶ Динамика;
- ▶ Статика.

## Вопрос 4

*Где проходит граница между кинематикой и динамикой?*

## Вопрос 5

*Что такое импульс? Это кинематическая или динамическая величина?*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2)$$

# Переосмысление некоторых понятий

## Материальная точка и физическое тело

### Определение 1

**Материальная точка** — это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь и считать всю его массу сосредоточенной в одной точке пространства.

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{m, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (3)$$

### Утверждение 1

Любое физическое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек (систему материальных точек).

### Вопрос 6

Какова плотность системы материальных точек? Что это такое?

# Переосмысление некоторых понятий

## Материальная точка и физическое тело

### Определение 1

**Материальная точка** — это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь и считать всю его массу сосредоточенной в одной точке пространства.

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{m, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (3)$$

### Утверждение 1

Любое физическое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек (систему материальных точек).

### Вопрос 6

Какова плотность системы материальных точек? Что это такое?

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (4)$$

# Переосмысление некоторых понятий

## Масса

Таблица 1: Классический словарь понятия масса

Понятие	Математическая модель	Физическая модель
Масса	$m = \text{const} \in \mathbb{R} : m > 0$	количества вещества Мера инертности тела гравитационной способности

### О массе в современном смысле слова

*The word mass still appears in modern physics, and the modern usage evolved from the earlier one, but it denotes a radically different, more fluid concept.*

F. Wilczek. Origins of mass // Central European J. of Physics. **10**, 1021-1037 (2012), DOI:10.2478/s11534-012-0121-0.

# Переосмысление некоторых понятий

## Обобщения понятия материальной точки — 1

### Вопрос 7

*Возможны ли обобщения понятия материальной точки в рамках классической механики? Какие?*

### Вопрос 7

*Возможны ли обобщения понятия материальной точки в рамках классической механики? Какие?*

- ▶ Модель точки комплексной массы;
- ▶ Модель точки переменной массы;
- ▶ Модель термодинамической точки (Н. Г. Четаев, В. В. Румянцев).

### Задача Эйлера-Лагранжа-Лиувилля-Вельде-Дарбу

V. V. Anikovskii, S. G. Zhuravlev. Euler's problem and its applications in celestial mechanics and space dynamics // J. of Applied Mathematics and Mechanics, **75**, №6, 660-666 (2011), DOI:10.1016/j.jappmathmech.2012.01.006.

# Переосмысление некоторых понятий

## Обобщения понятия материальной точки — 2

### Модель точки переменной массы

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{react}}. \quad (5)$$

L. Casetta, C. P. Pesce. A brief note on the analytical solution of Meshchersky's equation within the inverse problem of Lagrangian mechanics // Acta Mech, **226**, 2435-2439 (2015), DOI:10.1007/s00707-015-1315-5.

### Модель термодинамической точки

$$M = \{m, \mu, \mathbf{r} \in {}^*\mathbb{R}^3\}. \quad (6)$$

${}^*\mathbb{R}$  — поле гипердействительных чисел.

J. Tarski. *Short Introduction to Nonstandard Analysis*. Many Degrees of Freedom in Field Theory **30**, 225-240 (2013).

# Переосмысление некоторых понятий

## Мгновенная скорость материальной точки

### Определение 2

**Скорость** — это производная радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{v} \underset{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (7)$$

### Определение 3 (Эйлер, 1736)

О всяком теле, которое движется, говорят, что оно имеет быстроту или скорость, и эта скорость измеряется тем расстоянием, которое тело, двигаясь равномерно, проходит в данное время. . . . Скорость, которую имеет движущееся неравномерно тело в какой-либо точке проходимого пути, должна измеряться тем расстоянием, которое **могло бы** пройти в данное время тело, движущееся равномерно с этой же скоростью.

### Вопрос 8

Эквиваленты ли Определения 2 и 3?



# Переосмысление некоторых понятий

Примеры, указывающие на несостоятельность Определения 2

## Вопрос 9

*Для всякого ли движения можно использовать Определение 2?*

# Переосмысление некоторых понятий

Примеры, указывающие на несостоятельность Определения 2

## Вопрос 9

*Для всякого ли движения можно использовать Определение 2?*

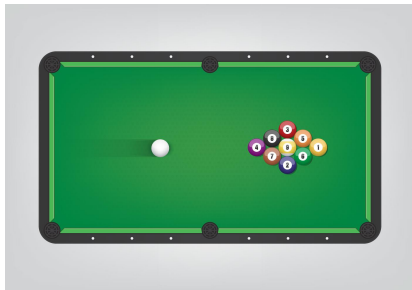


Рис. 2: Пример  $\mathbf{r}(t) \notin C^1$  (изображение с сайта vecteezy.com)

# Переосмысление некоторых понятий

Механическое действие — 1

Вопрос 10

*Что такое действие?*

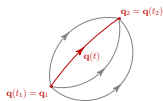
# Переосмысление некоторых понятий

## Механическое действие — 1

### Вопрос 10

*Что такое действие?*

### Определение 4 (ЛЛ, Т. I, § 2)



$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt. \quad (8)$$

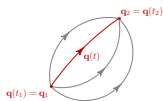
# Переосмысление некоторых понятий

## Механическое действие — 1

### Вопрос 10

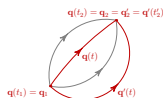
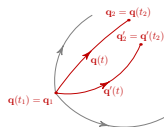
Что такое действие?

### Определение 4 (ЛЛ, Т. I, § 2)



$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt. \quad (8)$$

### Определение 5 (ЛЛ, Т. I, § 43)



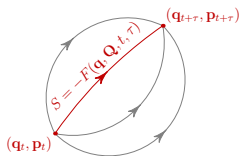
$$S = \int (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt). \quad (9)$$

# Переосмысление некоторых понятий

## Механическое действие — 2

### Определение 6 (ЛЛ, Т. I, § 45)

*Действие (с точностью до знака) — производящая функция механического движения, понимаемого как каноническое преобразование (гамильтонова производящая функция, HPF — Hamiltonian Principle Function).*



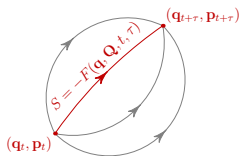
$$dS = \mathbf{p}_{t+\tau} d\mathbf{q}_{t+\tau} - \mathbf{p}_t d\mathbf{q}_t - (H_{t+\tau} - H_t)dt. \quad (10)$$

# Переосмысление некоторых понятий

## Механическое действие — 2

### Определение 6 (ЛЛ, Т. I, § 45)

Действие (с точностью до знака) — производящая функция механического движения, понимаемого как каноническое преобразование (гамильтонова производящая функция, HPF — *Hamiltonian Principle Function*).



$$dS = \mathbf{p}_{t+\tau} d\mathbf{q}_{t+\tau} - \mathbf{p}_t d\mathbf{q}_t - (H_{t+\tau} - H_t)dt. \quad (10)$$

### Уравнение Гамильтона — Якоби (ЛЛ, Т. I, § 47)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \quad (11)$$

# О некоторых формулировках

## Законы Ньютона

### Вопрос 11

*Сколько законов Ньютона вы можете сформулировать?*



# О некоторых формулировках

## Законы Ньютона

### Вопрос 11

*Сколько законов Ньютона вы можете сформулировать?*

### 0-й закон Ньютона (Гипотеза абсолютного времени)

Время — абсолютно.

### 1-й закон Ньютона

Существует система отсчёта, называемая инерциальной (ИСО), в которой свободная частица движется равномерно и прямолинейно.

### 2-й закон Ньютона

В ИСО ускорение  $\mathbf{a}$  частицы с массой  $m$  связано с суммарной силой  $\mathbf{F}$ , действующей на частицу как

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (12)$$

### 3-й закон Ньютона

В ИСО при взаимодействии двух частиц сила  $\mathbf{F}_{21}$ , с которой 1-я частица действует на 2-ю, и сила  $\mathbf{F}_{12}$ , с которой 2-я частица действует на 1-ю, направлены вдоль прямой, соединяющей частицы и противоположны:  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ .

# О некоторых формулировках

## Шесть законов Ньютона — 1

М.Г. Иванов. Механика и теория поля.

### 1а закон Ньютона

Существует система отсчёта, называемая инерциальной (ИСО), в которой свободная частица движется равномерно по геодезической.

### 1а' закон Ньютона

Существует система отсчёта, называемая инерциальной (ИСО), в которой импульс свободной частицы сохраняется.

### 1б закон Ньютона

Геометрия пространства евклидова.

# О некоторых формулировках

## Шесть законов Ньютона — 2

2а закон Ньютона (уравнение баланса импульса)

В ИСО сила — это скорость передачи импульса

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (13)$$

2б закон Ньютона

Импульс  $\mathbf{p}$  пропорционален скорости частицы

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (14)$$

где коэффициент  $m$  называется массой.

# О некоторых формулировках

## Шесть законов Ньютона — 3

### За закон Ньютона

В ИСО при парном взаимодействии частиц импульс сохраняется.

### 3б закон Ньютона

В ИСО при парном взаимодействии частиц силы направлены вдоль геодезической, соединяющей частицы.

### 3б' закон Ньютона

В ИСО при парном взаимодействии частиц момент импульса сохраняется.

# О некоторых формулировках

## Четырёхмерное пространство ньютоновской механики

### Определение 7

Ньютоновское пространство-время  $\mathbb{N}$  — четвёрка объектов

$$\mathbb{N} = (\mathbb{R}^4, dt, d\ell|_{dt=0}, \mathcal{A}), \quad (15)$$

где

1.  $\mathbb{R}^4$  — множество событий, образованное четвёрками вещественных чисел  $(t, \mathbf{r})$ ;
2.  $dt = |t_1 - t_0|$  — изменение времени между событиями  $(t_0, \mathbf{r}_0)$  и  $(t_1, \mathbf{r}_1)$ ;
3.  $d\ell|_{dt=0} = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2}$  — евклидова метрика между одновременными событиями  $(t, \mathbf{r}_0)$  и  $(t, \mathbf{r}_1)$ ;
4.  $\mathcal{A}$  — аффинная структура, определяющая прямые как кривые вида  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ , где  $\mathbf{v} = \text{const}$ .

# О некоторых формулировках

## Симметрии пространства $\mathbb{N}$

### Утверждение 2

Симметрии пространства  $\mathbb{N}$ , т. е. преобразования  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$ , сохраняющие введённые структуры, — это переходы между произвольными ИСО в ньютоновской механике:

1. сдвиги по времени  $t \rightarrow t' = t + t_0$ ;
2. обращение времени  $t \rightarrow t' = -t$ ;
3. сдвиги пространства  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ ;
4. инверсия пространства  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ ;
5. повороты  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ,  $\det \mathbf{R} = 1$ ;
6. преобразования Галилея  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ ;
7. произвольные комбинации преобразований 1–6.

# О некоторых формулировках

## О конфигурационном пространстве

### Определение 8

**Конфигурационное пространство механической системы** — множество всех возможных пространственных положений совокупности материальных точек системы, удовлетворяющих наложенным связям. Каждая точка конфигурационного пространства соответствует определённому пространственному положению всех материальных точек системы.

### Вопрос 12

Зачем потребовалось это понятие? Так ли оно необходимо?

# О некоторых формулировках

## О конфигурационном пространстве

### Определение 8

**Конфигурационное пространство механической системы** — множество всех возможных пространственных положений совокупности материальных точек системы, удовлетворяющих наложенным связям. Каждая точка конфигурационного пространства соответствует определённому пространственному положению всех материальных точек системы.

### Вопрос 12

Зачем потребовалось это понятие? Так ли оно необходимо?

- ▶ Введение конфигурационного пространства сводит задачу о движении механической системы к задаче о движении одной точки в конфигурационном пространстве;
- ▶ Ковариантная формулировка механики в форме уравнений Лагранжа;
- ▶ Дифференцируемые хаусдорфовы многообразия.



# О некоторых формулировках

## Симметрия канонических уравнений в фазовом пространстве

### Координаты в фазовом пространстве

$$z^\mu = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T. \quad (16)$$

### Канонический штрих

$$\dot{z}_\mu = b_{\mu\nu} z^\nu, \quad b_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1). \quad (17)$$

### Уравнения Гамильтона

$$\frac{dz^\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_\mu}. \quad (18)$$

# О некоторых формулировках

От действия — к подвигу

Р. Ли. Симметричные формулировки классической механики.

Определение и уравнение подвига

$$\Phi = \int_0^t [z^\mu \dot{z}_\mu - 2H] d\tau, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_\mu} = z^\mu. \quad (19)$$

Принцип стационарности подвига

$$\delta \Phi_f = 0. \quad (20)$$

Аналог уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H = 0. \quad (21)$$

# О некоторых формулировках

## Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве — 1

Пусть задан невырожденный лагранжиан  $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

### Утверждение 3

*Неавтономную (явно зависящую от времени) систему можно переписать как автономную, выразив время  $t$  как функцию от некоторого монотонного параметра  $\ell$ .*

### Действие

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = \int L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}/\dot{t}) \dot{t} d\ell, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{d\ell}. \quad (22)$$

### Расширенные лагранжиан и действие

$$S_e[t(\ell), \mathbf{q}(\ell)] = \int L_e(t, \dot{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) d\ell, \quad L_e(t, \dot{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}/\dot{t}) \dot{t} \quad (23)$$

# О некоторых формулировках

## Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве — 2

Время в расширенном конфигурационном пространстве  $t \stackrel{\text{def}}{=} q^0$ , причём

$$p_\mu = \frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}, \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (24)$$

$$p_0 = \frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}^0} = \frac{\partial L_e}{\partial \dot{t}} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \dot{q}^\mu = -E. \quad (25)$$

## Уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S_e}{\delta q^\alpha(\ell)} = \dot{t} \frac{\delta S}{\delta q^\alpha(\ell)} = \dot{t} \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d p_\alpha}{dt} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\delta S_e}{\delta q^0(\ell)} = \dot{t} \left( \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{dE}{dt} \right). \quad (27)$$

*“Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.”* (И. Ньютон, Математические начала натуральной философии)

*“Дано уравнение, заключающее в себе текущие количества, найти течения и наоборот.”* (буквальный перевод)

*“Полезно изучать дифференциальные уравнения.”*  
(современный очень вольный перевод В. И. Арнольда)

Спасибо за внимание!