Минобрнауки России
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина»
Институт точных наук и информационных технологий

П. А. Макаров, В. М. Юркин, В. С. Власов

МЕХАНИКА

Сборник задач

Текстовое учебное электронное издание на компакт-диске

Сыктывкар
Издательство СГУ им. Питирима Сорокина
2017

ISBN 978-5-87661-540-4

УДК 531
ББК 22.2
М 15

Издается по постановлению научно-методического совета ФГБОУ ВО «СГУ имени Питирима Сорокина».

Рецензенты:

Секушин Н. А., с. н. с. Института химии КНЦ УрО РАН, д. ф.-м. н.;
Кафедра автоматизации технологических процессов Сыктывкарского лесного института (филиала) ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С. М. Кирова»;

Макаров П.А., Юркин В.М., Власов В.С.

М 15 Механика [Электронный ресурс]: сборник задач: текстовое учебное электронное издание на компакт-диске / П. А. Макаров, В. М. Юркин, В. С. Власов; Федер. гос. бюдж. образоват. учреждение высш. образования «Сыктыв. гос. ун-т им. Питирима Сорокина». — Электрон. текстовые дан. (1,0 МБ). — Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. — 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). — Систем. требования: ПК не ниже класса Pentium III; 256 МБ RAM; не менее 1,5 ГБ на винчестере; Windows XP с пакетом обновления 2 (SP2); Adobe Acrobat Reader 10 и выше; видеокарта с памятью не менее 32 МБ; экран с разрешением не менее 1024×768 точек; 4-скоростной дисковод (CD-ROM) и выше; мышь. — Загл. с титул. экрана. — ISBN 978-5-87661-540-4.

Предлагаемое учебное пособие является сборником задач, сопровождающим семинарские занятия по курсу «Механика», преподаваемого в Сыктывкарском государственном университете имени Питирима Сорокина студентам первого курса по направлениям 03.03.02 «Физика» и 03.03.03 «Радиофизика».

Настоящее издание будет полезно студентам физико-математических, технических и естественно-научных специальностей высших учебных заведений, начинающим изучать общий курс физики, а также всем желающим научиться решать задачи по механике.

УДК 531
ББК 22.2

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика — это раздел общей физики, изучающий механическое движение.

Цель изучения механики состоит в том, чтобы представить физическую теорию механического движения как обобщение наблюдений, практического опыта и эксперимента. Физическая теория выражает связи между физическими явлениями и величинами в математической форме. Изучение механики на семинарских занятиях позволяет научиться использовать теоретические знания для решения практических задач не только в самой механике, но и в других областях науки и техники.

Настоящее учебное пособие составлено на основе лекционных и семинарских занятий по курсу «Механика», проведённых авторами в Институте точных наук и информационных технологий Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина студентам направлений обучения «Физика» и «Радиофизика» в 2012–2017 годах.

СЕМИНАР 1

Векторы и действия над ними

Краткая теория

В физике вообще, и в механике в частности, чаще всего встречаются два типа физических величин: *скаляры* и *векторы*.

Скаляр — это физическая величина, значение которой характеризуется одним числом без учёта направления или какой-либо другой оценки, например: масса m, площадь S, объём V, температура T и другие.

Вектор — это величина, характеризующаяся численным значением и направлением в пространстве. Можно утверждать, что вектор является направленным отрезком. В физике встречаются три типа векторов.

Свободный вектор — это вектор, начало которого может быть совмещено с любой точкой пространства, в которой рассматривается данный вектор. Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе в любую точку пространства. Примеры: скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ твёрдого тела, движущегося поступательно.

Связанный вектор — вектор, начало которого совпадает с определённой (фиксированной) точкой пространства. Так, скорость $\vec{v}$ движущейся жидкости в некоторой точке, является примером связанного вектора.

Скользящий вектор — вектор, начало которого можно произвольно выбирать на прямой, на которой расположен вектор. Таким образом, этот вектор может скользить по прямой, на которой он расположен, не изменяя своего направления. Скользящий вектор в отличие от свободного нельзя переносить с одной прямой на другую. Пример: сила $\vec{F}$, приложенная к твёрдому телу.

В дальнейшем чаще всего будут встречаться именно свободные векторы, которые для простоты мы будем называть векторами. Графически векторы изображаются в виде направленных отрезков прямой определённой длины. Например, для того чтобы представить скорость в пять метров в секунду, надо нарисовать отрезок прямой длиной в пять единиц в направлении движения тела. Векторы $\vec{A}$ и $-\vec{A}$ имеют равные численные значения, но противоположны по направлению. Численное значение вектора $\vec{A}$ называется модулем или длиной и обозначается A или $|\vec{A}|$. Это величина является скаляром и положительно определена, т. е. $A \geqslant 0$. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$.

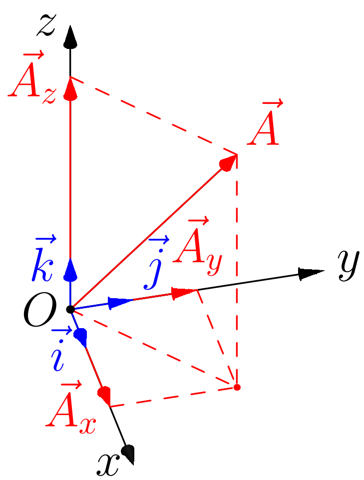


Рис. 1.1. Разложение вектора на составляющие

Любой вектор $\vec{A}$ в трёхмерном пространстве всегда можно представить тремя числами (A_x, A_y, A_z), которые являются его *координатами* в декартовой системе координат. Аналогично можно разложить вектор на *составляющие* $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ и $\vec{A}_z$ — компоненты вектора вдоль координатных осей Ox, Oy и Oz, соответственно (см. рис. 1.1). При этом выполняются следующие соотношения:

$$\vec{A}_x = A_x\vec{i}, \quad \vec{A}_y = A_y\vec{j}, \quad \vec{A}_z = A_z\vec{k},$$

где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — *орты* (единичные векторы) координатных осей.

Длина вектора связана с его координатами следующим соотношением:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{1.1}$$

Допустимые над свободными векторами операции

Сравнение

Два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называются *равными* при выполнении трёх условий:

1) равны их модули $A = B$;
2) векторы одинаково направлены $\vec{A} \upuparrows \vec{B}$;
3) равны их размерности $[\vec{A}] = [\vec{B}]$.

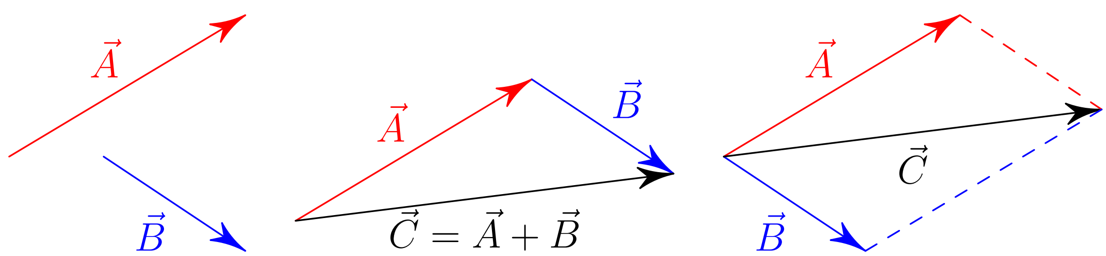
Умножение на скаляр

Результатом умножения вектора $\vec{A}$ на скаляр k является новый вектор $\vec{B}$, обладающий следующими свойствами:

1) $B = |k| \cdot |\vec{A}|$;
2) $\vec{B} \upuparrows \vec{A}$, если $k > 0$ и $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}$ при $k < 0$;
3) $[\vec{B}] = [k] \cdot [\vec{A}]$.

Сложение векторов

Суммой векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ является новый вектор $\vec{C}$, называемый *результирующим* вектором. Для его построения можно использовать метод треугольника или параллелограмма (см. рис. 1.2)



(a) исходные векторы (b) метод треугольника (c) метод параллелограмма

Рис. 1.2. Сложение векторов

Операция сложения *коммутативна*, т. е. её результат не зависит от порядка слагаемых: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$. Координаты суммарного вектора равны алгебраической сумме координат исходных векторов:

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z.$$

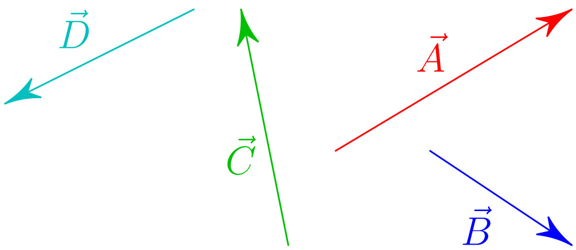
Аналогично можно складывать три и более векторов (см. пример на рис. 1.3).

Вычитание векторов

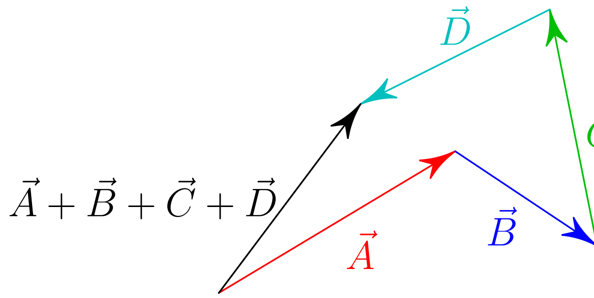
Разностью векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ является новый вектор $\vec{C}$, который можно интерпретировать как сумму векторов $\vec{A}$ и $-\vec{B}$ (см. рис. 1.4). Также можно запомнить мнемоническое правило, согласно которому вектор соответствующий разности двух векторов проводится «*из конца второго вектора в конец первого вектора*».

Координаты вектора $\vec{C}$ равны алгебраической разности координат исходных векторов:

$$C_x = A_x - B_x, \quad C_y = A_y - B_y, \quad C_z = A_z - B_z.$$

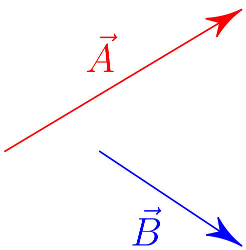


(a) исходные векторы

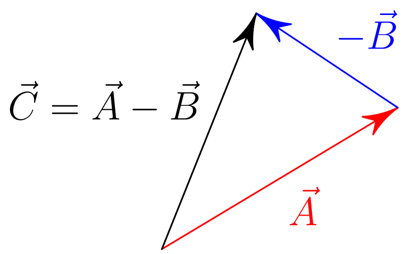


(b) сумма векторов

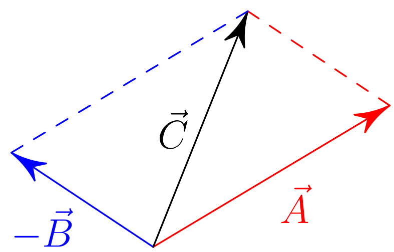
Рис. 1.3. Сложение нескольких векторов



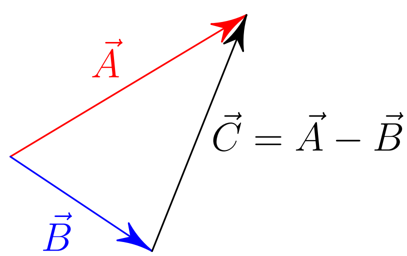
(a) исходные векторы



(b) метод треугольника



(c) метод параллелограмма



(d) из конца второго в конец первого

Рис. 1.4. Вычитание векторов

Операции сложения и вычитания допускаются только над векторами одинаковой размерности.

Проекция вектора на ось

Проекцией A_x вектора $\vec{A}$ на ось Ox называется скаляр, равный алгебраической разности координат A_2 и A_1 концов вектора, спроектированных на ось Ox (см. рис. 1.5a): $A_x = A_2 - A_1$. Также из рис. 1.5a можно заключить, что проекцию вектора на выбранную ось можно вычислить как произведение модуля вектора на косинус угла α между направлением вектора и осью:

$$A_x = |\vec{A}\,|\cos\alpha. \tag{1.2}$$

Последнее равенство справедливо при любых ориентациях вектора относительно оси, так как (см. рис. 1.5b):

$$B_y = -|\vec{B}\,|\cos\beta = |\vec{B}\,|\cos(\pi-\beta) = |\vec{B}\,|\cos\alpha.$$

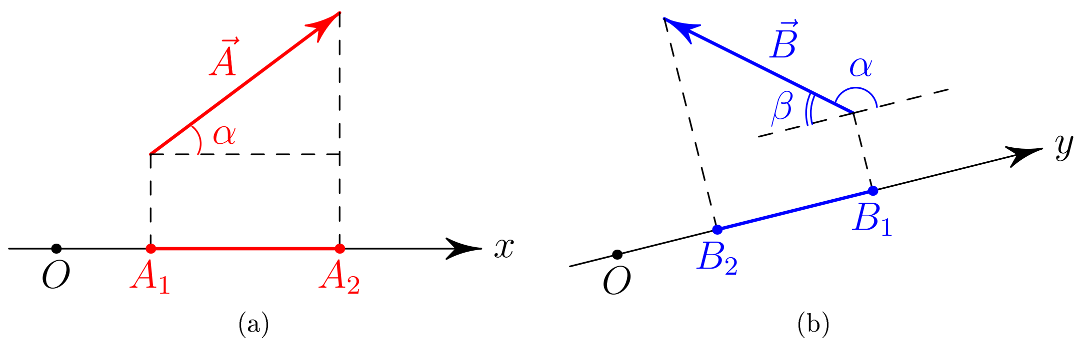


Рис. 1.5. Проекция вектора на ось

В векторной алгебре имеет место следующая теорема:

Теорема 1 (О проекциях вектора на оси). *Пусть* $\vec{A}$, $\vec{B}$ *и* $\vec{C}$ *— произвольные векторы, а* p, q *и* g *— скаляры.*
Тогда

$$\vec{D} = p\vec{A} + q\vec{B} - g\vec{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} D_x = pA_x + qB_x - gC_x, \\ D_y = pA_y + qB_y - gC_y, \\ D_z = pA_z + qB_z - gC_z. \end{cases}$$

Скалярное произведение

Скалярным произведением $(\vec{A}\cdot\vec{B})$ двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется число C, равное произведению модулей векторов A и B и косинусу угла $(\vec{A}\,\hat{,}\,\vec{B})$ между ними:

$$C = AB\cos(\vec{A}\,\hat{,}\,\vec{B}). \tag{1.3}$$

Из приведённого определения очевидно, что скалярное произведение коммутативно. Используя разложение векторов на составляющие, несложно показать, что скалярное произведение можно вычислить как сумму произведений координат векторов:

$$C = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{1.4}$$

Равенства (1.3) и (1.4) позволяют определить правило вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos(\vec{A}\,\hat{,}\,\vec{B}) = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}. \tag{1.5}$$

Векторное произведение

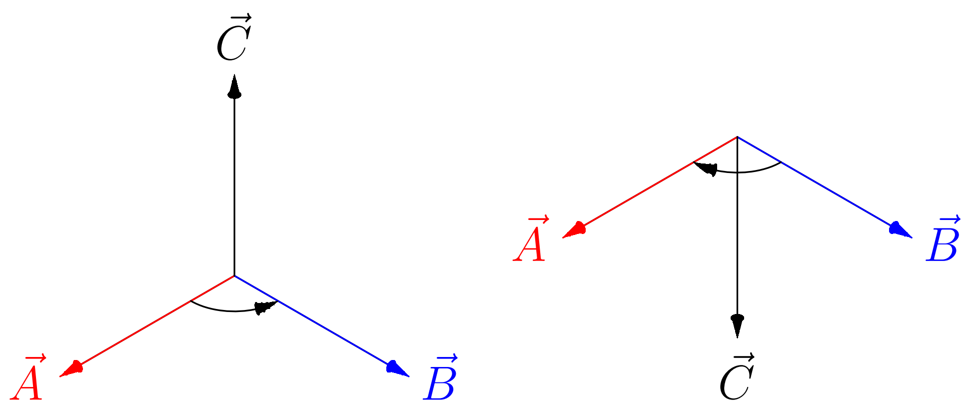
Векторным произведением $[\vec{A} \times \vec{B}]$ двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется новый вектор $\vec{C}$, перпендикулярный плоскости, в которой лежат исходные векторы и составляющий вместе с ними *правую тройку*. Модуль C равен произведению модулей векторов A и B и синусу угла $(\vec{A}\hat{,}\vec{B})$ между ними:

$$C = AB\sin(\vec{A}\hat{,}\vec{B}). \tag{1.6}$$

Координаты вектора $\vec{C}$ можно определить следующим образом:

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y, \quad C_y = A_zB_x - A_xB_z, \quad C_z = A_xB_y - A_yB_x. \tag{1.7}$$

Легко заметить (см. рис. 1.6), что векторное произведение некоммутативно, причём $[\vec{A} \times \vec{B}] = -[\vec{B} \times \vec{A}]$.



(a) $\vec{C} = [\vec{A} \times \vec{B}]$ (b) $\vec{C} = [\vec{B} \times \vec{A}]$

Рис. 1.6. Векторное произведение

Операции скалярного и векторного произведений допускаются над векторами произвольных размерностей, причём размерность результата равна произведению размерностей исходных векторов:

$$[\vec{C}\,] = [\vec{A}\,] \cdot [\vec{B}\,].$$

Задачи

№ 1. Даны величина вектора $F = 2$ и угол α между вектором $\vec{F}$ и ортом $\vec{i}$: $\alpha = (\vec{F}\hat{,}\vec{i}) = 120^\circ$. Найти проекции вектора $\vec{F}$ на оси Ox и Oy. Выразить вектор $\vec{F}$ через его составляющие F_x и F_y.

№ 2. Известны величины векторов $F_1 = 3$, $F_2 = F_3 = 2$; углы между векторами и ортом $\vec{i}$ равны $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = 2\pi/3$. Найти проекции суммарного вектора $\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ на оси Ox и Oy, выразить его через составляющие. Определить угол между вектором $\vec{S}$ и осью Oy.

№ 3. Даны векторы $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j}$.

Найти:

1) угол между этими векторами $(\vec{A} \,\hat{,}\, \vec{B})$;
2) скалярное произведение $(\vec{A} \cdot \vec{B})$;
3) векторное произведение $[\vec{A} \times \vec{B}]$.

№ 4. Тело совершает два последовательных, одинаковых по величине перемещения со скоростями $v_1 = 20$ м/с под углом $\alpha_1 = 60^\circ$ к направлению оси Ox и $v_2 = 40$ м/с под углом $\alpha_2 = 120^\circ$ к тому же направлению. Найти среднюю скорость движения $\vec{v}_{\text{ср}}$.

№ 5. Автомобиль совершает манёвр на криволинейном участке пути так, что его ускорение имеет величину $a = 5$ м/с^2. При этом известно, что проекция ускорения на направление скорости равна $a_v = -2$ м/с^2. Что при этом можно сказать о движении автомобиля? Какой угол составляет вектор ускорения с вектором скорости в данный момент времени? Чему равна скорость автомобиля в данный момент времени, если радиус закругления участка дороги $R = 10$ м?

№ 6. В некоторый момент времени электрически заряженная частица массы $m = 1$ мг находится в точке пространства с координатами $x = 200$, $y = 300$, $z = 400$ $([\vec{r}\,] = \text{м})$. Также известна скорость частицы $\vec{v} = 20\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k}$ $([\vec{v}\,] = \text{м/с})$. Вычислить модули векторов $\vec{r}$ и $\vec{v}$, их направляющие косинусы, а также угол $(\vec{r} \,\hat{,}\, \vec{v})$. Определить проекцию вектора скорости на радиус-вектор частицы. Вычислить величину $[\vec{r} \times m\vec{v}]$ и выяснить её физический смысл.

№ 7. Точки A и B движутся в плоскости xOy, и уравнения их движения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{r}_A(t) = at\,\vec{i} + b\,\vec{j}, \\ \vec{r}_B(t) = b\,\vec{i} + at\,\vec{j}, \quad a \text{ и } b \text{ — некие константы.} \end{cases}$$

Встретятся ли эти точки? Если встретятся, то когда и где? Какой смысл имеют константы a и b?

Домашнее задание

№ 1. Доказать утверждения (1.1), (1.4) и (1.7).

№ 2. Рассматриваются векторы в плоскости xOy. Даны величины векторов $F_1 = F_2 = 3$, $F_3 = 9$; углы между ними и ортом $\vec{i}$: $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\alpha_3 = -\pi/6$.

Найти проекции S_x и S_y суммарного вектора $\vec{S} = \sum\limits_{i=1}^{3} \vec{F}_i$, а также угол между вектором $\vec{S}$ и горизонтом (осью Ox).

№ 3. Даны точки $A\,(3, -1, 2)$ и $B\,(-1, 2, 1)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

№ 4. Известны две координаты вектора $\vec{f}$: $x = 4$, $y = -12$. Определить его третью координату z при условии, что $f = 13$.

№ 5. Вычислить координаты точки M, если её радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

№ 6. Тело движется в плоскости xOy. В некоторой точке траектории известны проекции его скорости и ускорения: $v_x = 4$ м/с, $v_y = 3$ м/с, $a_x = 3$ м/с^2, $a_y = 1$ м/с^2. Найти угол между вектором ускорения и горизонтом, угол между векторами ускорения и скорости, тангенциальную и нормальную составляющие ускорения.

СЕМИНАР 2

Равномерное движение

Краткая теория

Механическое движение — это процесс перемещения тела в пространстве с течением времени. При этом совершенно очевидно, что механическое движение *относительно*, так как одно и то же перемещение может выглядеть для различных наблюдателей по-разному. В связи с этим возникает необходимость введения *системы отсчёта.*

Система отсчёта — это тело, условно принимаемое в рамках данной задачи за неподвижное, относительно которого рассматривается движение. К системе отсчёта относятся приборы, необходимые для измерения расстояний и промежутков времени. Кроме того, с телом отсчёта связывают систему координат.

Материальная точка — это тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь и считать, что вся масса тела сосредоточена в одной геометрической точке.

Радиус-вектор $\vec{r}$ — это вектор, проведённый из начала системы координат в текущее положение материальной точки. Проекциями радиус-вектора на координатные оси являются координаты материальной точки:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.1}$$

Если известен явный вид функции $\vec{r}(t)$, описывающий изменение положения материальной точки с течением времени, то говорят, что задан её *закон движения.* В процессе движения конец радиус-вектора описывает в пространстве кривую, которую называют *траекторией движения*, или *годографом* радиус-вектора.

Пройденный телом путь S — это скалярная величина, равная длине траектории.

Перемещение — вектор, проведённый из начального положения материальной точки в конечное:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \tag{2.2}$$

Размерность координат, радиус-вектора, пройденного пути и перемещения одинакова, и в системе СИ равна метру:

$$[x] = [y] = [z] = [\vec{r}] = [S] = [\Delta\vec{r}] = 1 \text{ м}.$$

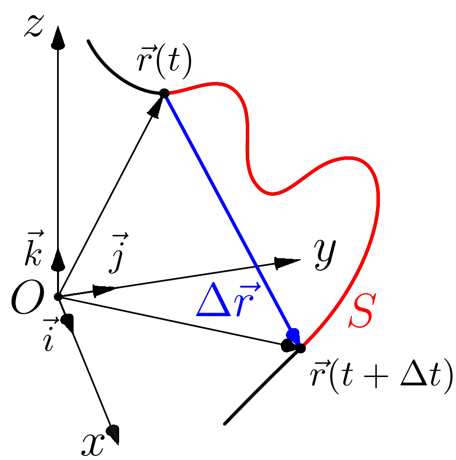


Рис. 2.1. Траектория, перемещение и пройденный путь

Модуль перемещения материальной точки не может превышать пройденного пути $|\Delta\vec{r}| \leqslant S$, причём равенство $|\Delta\vec{r}| = S$ имеет место только в случае *прямолинейного движения.*

Быстроту изменения положения материальной точки принято характеризовать следующими тремя величинами.

Средняя скорость — это вектор, равный отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ материальной точки и интервала времени Δt, за который это перемещение произошло:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Среднепутевая (среднетраекторная) скорость — это скалярная величина, равная отношению пройденного пути S и прошедшего интервала времени Δt:

$$v_{\text{ср. п.}} = \frac{S}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

Мгновенная скорость — вектор, характеризующий быстроту изменения положения материальной точки в каждый момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{2.5}$$

В силу своего определения мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории. Все виды скорости в системе СИ измеряются в метрах в секунду:

$$[\vec{v}_{\text{ср}}] = [v_{\text{ср. п.}}] = [\vec{v}\,] = 1\ \text{м/с}.$$

Движение называется *равномерным*, если за равные промежутки времени тело совершает равные по величине перемещения, т. е. $v = \text{const}$.

В некоторых задачах возникает необходимость изучать движение материальной точки относительно двух различных систем отсчёта одновременно. Одну из них при этом условно считают неподвижной, а вторую полагают движущейся относительно первой. Тогда движение точки можно рассматривать как состоящее из двух движений: первое — движение относительно движущейся системы отсчёта, второе — движение вместе с движущейся системой относительно неподвижной. Такое движение называют *сложным (составным)*.

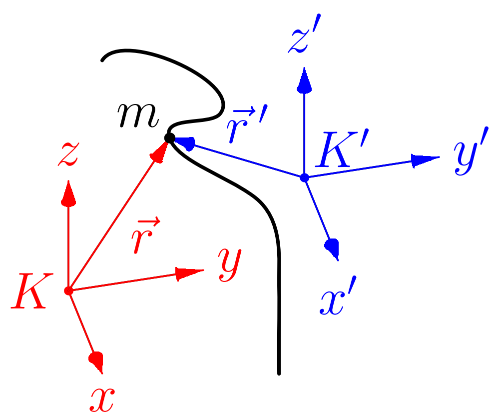


Рис. 2.2. Сложное движение материальной точки

Неподвижную систему отсчёта называют *абсолютной*. Соответственно, абсолютными называют движение, перемещение, скорость и ускорение точки относительно этой СО. На рис. 2.2 система отсчёта K — абсолютная.

Подвижную систему отсчёта называют *относительной*. Движение, перемещение, скорость и ускорение точки относительно этой системы также именуют относительными. Система K' на рис. 2.2 является относительной.

Движение, совершаемое подвижной системой K' и всеми жёстко связанными с ней точками пространства относительно системы K, называют *переносным*. Пусть некая материальная точка m движется относительно подвижной системы K'. Тогда та точка системы K', с которой в данный момент времени совпадает положение m, также движется относительно неподвижной системы K. Мгновенную скорость этой точки системы K' называют *переносной* скоростью материальной точки.

Теорема 2 (Теорема о сложении скоростей). *При сложном движении материальной точки её абсолютная (результирующая) скорость равна сумме относительной и переносной скоростей.*

Эта теорема остаётся справедливой только в случае движения с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света c).

Рассмотрим движение двух материальных точек со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в некоторой абсолютной системе отсчёта K. Тогда согласно теореме о сложении скоростей имеем:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{2\,\text{отн}\,1},$$

где $\vec{v}_{2\,\text{отн}\,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — скорость второй точки относительно первой, а $\vec{v}_1$ играет роль переносной скорости.

Задачи

№ 1. На дистанции $S = 1500$ м одновременно стартуют два бегуна A и B. A пробегает первую половину пути со скоростью $v_1 = 4$ м/с, а вторую — со скоростью $v_2 = 6$ м/с. Бегун B первую половину времени, затраченного на преодоление всей дистанции, пробегает со скоростью $u_1 = 4$ м/с, а вторую — со скоростью $u_2 = 6$ м/с. Какой из бегунов финиширует раньше? На какое расстояние ΔS он обгонит другого бегуна?

№ 2. Лодка, идущая через реку на вёслах, движется относительно воды со скоростью 2 м/с в направлении, перпендикулярном к течению. Течение реки имеет скорость 1 м/с. Найти полную скорость лодки и направление этого вектора относительно берегов реки.

№ 3. Две пристани расположены друг против друга на противоположных берегах реки, скорость течения которой составляет 0.5 м/с. Какой курс должна держать лодка перевозчика, чтобы пересекать реку по прямой линии от одной пристани до другой? С какой скоростью при этом лодка будет двигаться поперёк реки? Относительно воды лодка развивает скорость 0.8 м/с.

№ 4. На тележке, равномерно движущейся по горизонтальной плоскости, установлена труба. Как должна быть ориентирована на тележке эта труба, чтобы капли дождя, падающие вертикально, пролетали через неё, не задевая внутренних стенок? Движение капель считать равномерным.

№ 5. На соревнованиях по плаванию на дистанции $S = 100$ м вольным стилем в бассейне длиной $L = 25$ м пловец, проплыв четверть дистанции за время $t_1 = 11$ с, каждую последующую четверть дистанции проплывал на $\Delta t = 1.5$ с хуже. Вычислите все время заплыва, среднепутевую скорость пловца и его среднюю скорость перемещения.

№ 6. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1 = 50$ ступенек, во второй раз, двигаясь в ту же сторону, со скоростью втрое большей, он насчитал $n_2 = 75$ ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

№ 7. Корабль идёт на запад со скоростью 6.5 м/с. Ветер дует с юго-запада со скоростью 3.5 м/с. Какую скорость ветра зарегистрируют приборы, расположенные на корабле? Каково будет показываемое этими приборами направление ветра относительно курса корабля?

№ 8. Два корабля движутся параллельно друг другу в противоположные стороны со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. С одного из них стреляют в другой. Под каким углом φ к курсу обстреливаемого корабля надо направить орудие, чтобы попасть в цель, если выстрел производится в момент, когда оба судна находятся на прямой, перпендикулярной к направлению их движения? Горизонтальную проекцию скорости снаряда $\vec{v}_0$ считать постоянной.

№ 9. Два автомобиля движутся по дорогам, пересекающимися под углом α, со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. В начальный момент времени первый автомобиль проезжал перекрёсток, а второй находился на расстоянии L от него. Каким будет минимальное расстояние между автомобилями?

№ 10. Мальчик может плыть со скоростью, не больше чем 1 м/с. Он стартует на одном берегу реки, ширина которой 100 м, а скорость течения воды 2 м/с. На каком расстоянии от точки старта находится ближайшая точка на противоположном берегу, до которой может доплыть мальчик?

Домашнее задание

№ 1. Поезд первую половину пути двигался со скоростью в $n = 1.5$ раза большей, чем вторую половину пути. Какова скорость поезда на каждом участке, если средняя скорость прохождения всего пути равна $v_{\text{ср}} = 12$ м/с?

№ 2. Корабль плывёт на восток со скоростью $v_1 = 70$ км/ч. Пассажиру пролетающего над ним вертолёта кажется, что корабль плывёт на юг со скоростью $v_2 = 70$ км/ч. Найдите скорость вертолёта и угол, под которым она направлена к меридиану.

№ 3. Рыбак едет на лодке вверх по реке. Проезжая под мостом, он роняет в воду багор. Через полчаса рыбак это обнаруживает и, повернув назад, нагоняет багор в 5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, грёб одинаково?

№ 4. На листе бумаги начерчен прямой угол. Линейка, оставаясь все время перпендикулярной к биссектрисе этого угла, движется по бумаге со скоростью 10 см/с. Концы линейки пересекают стороны начерченного угла. С какой скоростью движутся по сторонам угла точки пересечения угла с линейкой?

№ 5. Эскалатор метро спускает идущего по нему вниз человека за 1 мин. Если человек будет идти вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?

№ 6. Колонна войск во время похода движется со скоростью $v_1 = 5$ км/ч, растянувшись по дороге на расстояние $l = 400$ м. Командир, находящийся в хвосте колонны, посылает велосипедиста с поручением головному отряду. Велосипедист отправляется и едет со скоростью $v_2 = 25$ км/ч и, на ходу выполнив поручение, сразу же возвращается обратно с той же скоростью. Через сколько времени t после получения поручения он вернулся обратно?

СЕМИНАР 3

Основные уравнения кинематики

Краткая теория

В общем случае механическое движение, как правило, неравномерное, а значит с течением времени скорость материальной точки изменяется. Для характеристики этого изменения используются следующие две величины.

Среднее ускорение — это вектор, равный отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ материальной точки и интервала времени Δt, за который это изменение произошло:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{3.1}$$

Мгновенное ускорение — это вектор, характеризующий быстроту изменения скорости материальной точки в каждый момент времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \tag{3.2}$$

Как и любой другой вектор, ускорение в произвольном случае всегда можно разложить на три компоненты в декартовой системе координат:

$$\vec{a}(t) = \dot{v}_x(t)\,\vec{i} + \dot{v}_y(t)\,\vec{j} + \dot{v}_z(t)\,\vec{k} = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}. \tag{3.3}$$

Единицей измерения ускорения в СИ является метр на секунду в квадрате:

$$[\,\vec{a}\,] = 1\ \text{м/с}^2.$$

Если известна траектория движения, вектор ускорения можно представить в виде суммы двух составляющих: касательного (тангенциального) и центростремительного (нормального) ускорений.

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \\ a_\tau = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v} \text{ — тангенциальная,} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \text{ — нормальная компоненты ускорения,} \end{cases} \tag{3.4}$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке.

Тангенциальное ускорение имеет смысл быстроты изменения величины скорости и направлено по вектору скорости, когда последняя увеличивается, либо в противоположном направлении, когда скорость уменьшается. Нормальное ускорение определяет быстроту изменения направления скорости и всегда направлено перпендикулярно скорости в сторону вогнутости траектории.

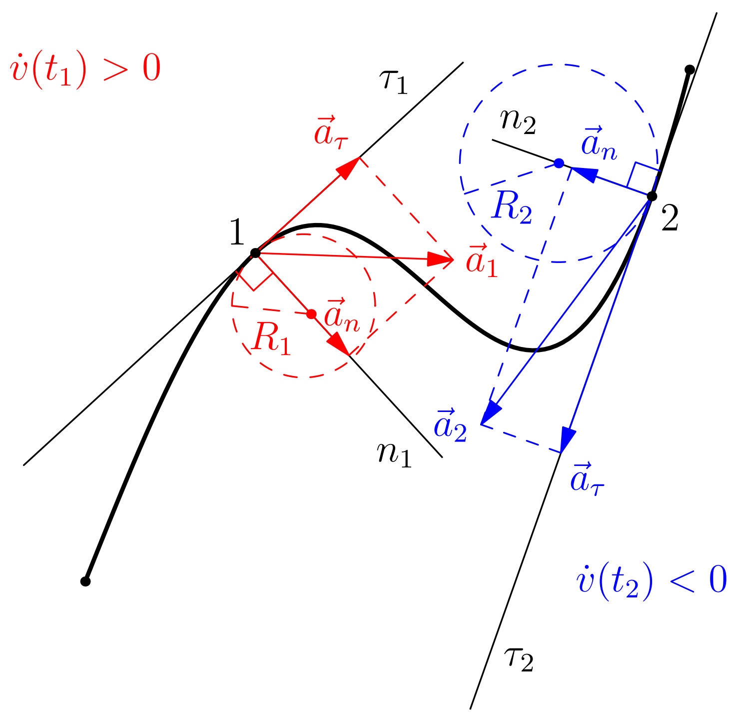


Рис. 3.1. Тангенциальное и нормальное ускорение

В механике часто рассматривают частный случай *равнопеременного движения*, в котором движение происходит с постоянным ускорением: $\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}$. В данном случае справедливы следующие уравнения:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}, \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $\vec{r}_0$ — начальное положение и $\vec{v}_0$ — начальная скорость материальной точки.

При решении задач данного семинара следует придерживаться следующего алгоритма действий.

Этапы решения задач

1. Сделать чертёж, поясняющий описанный в задаче процесс.
2. Выбрать систему отсчёта, координатные оси, указать величины, которые даны и которые надо определить (векторы перемещения, скорости, ускорения).
3. Проанализировать ускорение (например, ускорение тела, брошенного вблизи поверхности земли направлено вниз в любой точке траектории и постоянно, если не учитывается сопротивление воздуха).
4. Написать уравнение или систему уравнений, отражающих происходящий процесс. Если ускорение постоянно, то следует сразу написать уравнения для этого частного случая.
5. Если равенства векторные, то сопоставить им скалярные равенства (в виде проекций на координатные оси).
6. Посчитать количество уравнений и количество неизвестных, и, если уравнений меньше, дополнить систему уравнений соотношениями, данными в условии задачи.
7. Решить систему уравнений.
8. В случае необходимости исследовать полученные решения.
9. Все величины перевести в одну систему единиц.
10. Подставить численные значения и вычислить результат.

Задачи

№ 1. Известны законы изменения координат частицы со временем: $x(t) = 10 + 3t$, $y(t) = 15 + 2t - 10t^2$.

Определить:

1. Время полёта частицы.
2. Сколько времени частица будет подниматься?
3. Высоту подъёма.
4. С какой скоростью частица упадёт на землю?
5. Под каким углом произойдёт падение?
6. Ускорение частицы.
7. Углы между скоростью и ускорением, ускорением и горизонтом.
8. Нормальное и тангенциальное ускорение.
9. Дальность полёта.

№ 2. Ракета, запущенная вертикально вверх, в течение 10 с работы двигателя, движется с ускорением $a = 2g$. Определите максимальную высоту подъёма ракеты и скорость падения ракеты на землю. Начертите график зависимости скорости от времени для всего полёта. Считайте, что тормозные системы при спуске не работают и сопротивления воздуха нет.

№ 3. Нарисовать графики зависимости пути s, модуля перемещения Δr и величины ускорения a от времени для точки, движущейся вдоль прямой линии со скоростью, которая меняется, как указано на рисунке 3.2. Известно, что $OA = OB$ и $t_1 = t_5 - t_4$, а $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ (см. рис. 3.2).

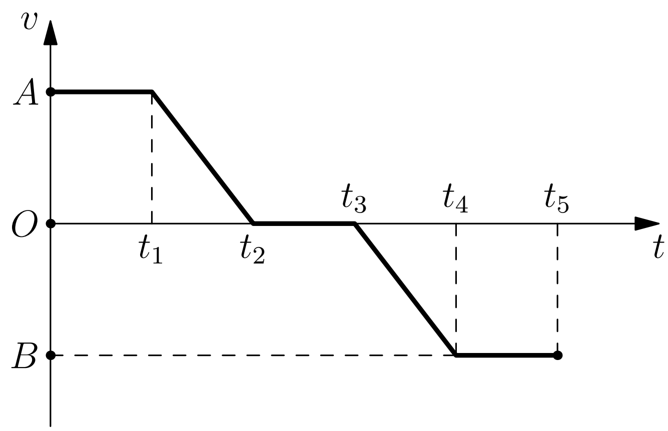


Рис. 3.2.

№ 4. Мяч бросили с вышки высотой $h = 20$ м вертикально вверх. Он упал на землю через время $t_п = 4$ с. С какой скоростью v_0 бросили мяч? За какое время он поднялся на максимальную высоту?

№ 5. Проезжая n-й этаж ($n = 6$) со скоростью $v_0 = 4$ м/с, лифт поднимался с ускорением $a = 2$ м/с^2, направленным вниз. На каком этаже n_1 остановится лифт, если высота каждого этажа равна $H = 4$ м?

№ 6. Мальчик бросил колесо, которое покатилось вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0, и сразу же побежал за ним с постоянной скоростью u. Через какое время τ мальчик поймал колесо, если оно двигалось с постоянным ускорением и через время t_0 повернуло в обратную сторону?

№ 7. Из артиллерийского орудия произведён выстрел под углом φ к горизонту. Величина начальной скорости снаряда v_0. Исследовать аналитически движение снаряда, пренебрегая сопротивлением воздуха полёту снаряда и кривизной поверхности Земли. Найденные зависимости изобразить графически.

Найти:

1) декартовы координаты (ось Ox — горизонтальное направление, ось Oy — вертикальное направление) снаряда как функции времени;

2) уравнение траектории снаряда $y = f(x)$ и построить согласно этому уравнению траекторию полёта снаряда;
3) максимальную высоту $H_{\text{макс}}$ полёта снаряда над землёй;
4) вертикальную и горизонтальную компоненты вектора скорости, а также его модуль как функции времени;
5) время полёта снаряда от орудия до падения на землю;
6) зависимость от времени угла α между вектором скорости снаряда и горизонтом;
7) горизонтальную дальность полёта снаряда как функцию его начальной скорости и угла возвышения орудия. При каком угле возвышения дальность будет максимальной при заданной начальной скорости снаряда?

№ 8. Начертить график кривой, которую составят концы векторов скорости снаряда, выпущенного из орудия под углом φ к горизонту, если все векторы, соответствующие скорости снаряда в каждый момент времени, построить из одной точки. Искомый график называется годографом вектора скорости. Какой вид имеет годограф ускорения в данной задаче? Сопротивление воздуха полёту снаряда не учитывать.

№ 9. На наклонную плоскость, расположенную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, с высоты $H = 0.5$ м падает шарик. Определите соотношение расстояний по наклонной плоскости между точками второго и третьего ударов и точками первого и второго ударов, а также расстояние между точкой падения шарика на плоскость и точкой третьего удара.

Домашнее задание

№ 1. На какое максимальное расстояние l можно бросить мяч в спортивном зале высотой $H = 8$ м, если мяч имеет начальную скорость $v_0 = 20$ м/с? Какой угол α с полом зала должен составлять вектор начальной скорости мяча? Считать, что высота начальной точки траектории мяча над полом мала по сравнению с высотой зала. Мяч во время полёта не должен ударяться о потолок зала. Сопротивлением воздуха полёту мяча пренебречь.

№ 2. С палубы корабля, идущего со скоростью $\vec{v}_{\text{к}}$, выпущен вертикально вверх снаряд с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти величину и направление вектора скорости снаряда $\vec{v}$ в зависимости от времени и уравнение траектории снаряда в неподвижной системе отсчёта.

№ 3. Тело, двигаясь с постоянным ускорением, проходит последовательно два одинаковых отрезка пути S по 10 м каждый. Найти ускорение тела и скорость в начале первого отрезка, если первый отрезок пройден телом за 1.06 с, а второй за 2.2 с.

№ 4. С вышки одновременно брошены два тела с одинаковой начальной скоростью v_0: одно — вертикально вверх, другое — вертикально вниз. Как с течением времени будет меняться расстояние S между этими телами? Сопротивление воздуха движению тел не учитывать.

№ 5. Шарик, которому сообщена горизонтальная скорость v_0, падает на горизонтальную плиту с высоты h. При каждом ударе о плиту вертикальная составляющая скорости уменьшается (отношение вертикальной составляющей скорости после удара к её значению до удара постоянно и равно ε). Определить, на каком расстоянии X от места бросания отскоки шарика прекратятся? Считать, что трение отсутствует, так что горизонтальная составляющая скорости шарика не меняется.

СЕМИНАР 4

Кинематика вращательного движения

Краткая теория

Рассмотрим материальную точку m, совершающую движение по окружности радиуса r. В этом случае изменение положения материальной точки связано только с изменением направления радиус-вектора, но не с его модулем ($r = \mathrm{const}$, в то время как $\vec{r} \neq \overrightarrow{\mathrm{const}}$). Такой вид движения называют *вращательным*. Очевидно, что в этом случае характеризовать положение радиус-вектором $\vec{r}$ несколько избыточно. Поэтому с данной целью используют *вектор угла поворота* $\vec{\varphi}$ — вектор, численно равный углу поворота материальной точки в радианах, перпендикулярный плоскости вращения и направленный так, чтобы из его конца вращение выглядело против часовой стрелки.

Аналогом перемещения для вращательного движения является следующая величина:

$$\Delta\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t + \Delta t) - \vec{\varphi}(t), \qquad [\vec{\varphi}\,] = [\Delta\vec{\varphi}\,] = \text{рад} = 1. \tag{4.1}$$

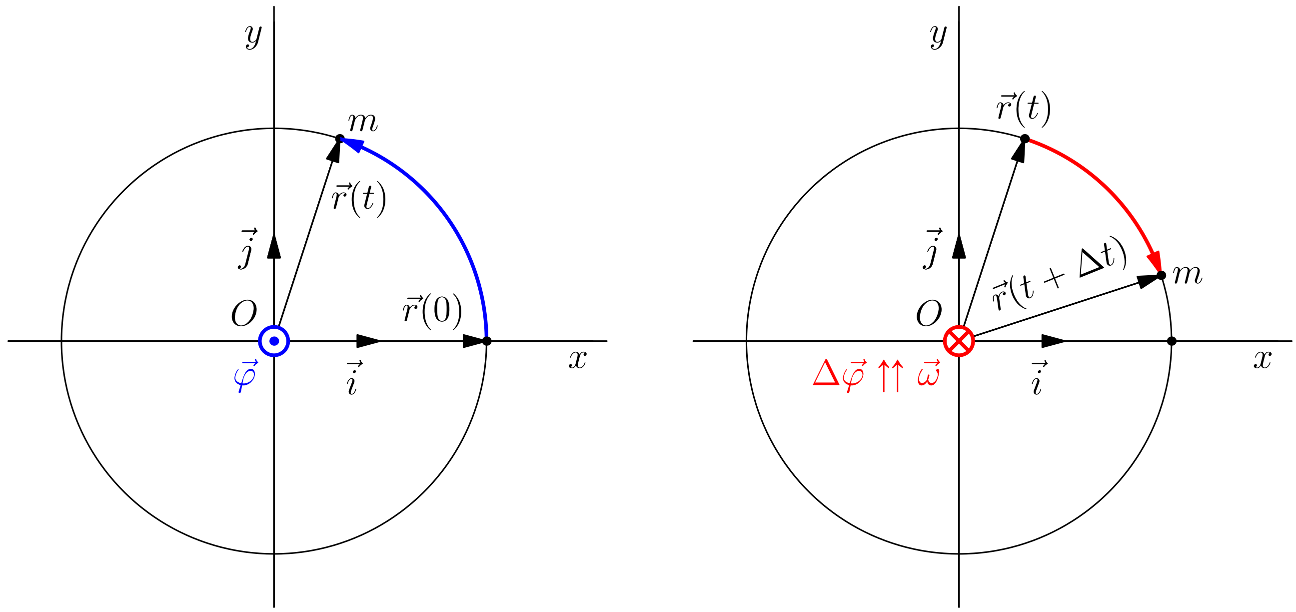
Угловая скорость — вектор, характеризующий быстроту изменения угла поворота:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}, \qquad [\vec{\omega}] = \text{рад/с} = \text{с}^{-1}. \tag{4.2}$$

Угловое ускорение — вектор, характеризующий быстроту изменения угловой скорости:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}}, \qquad [\vec{\beta}\,] = \text{рад/с}^2 = \text{с}^{-2}. \tag{4.3}$$

Если угловое ускорение постоянно ($\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$), то вращение называется *рав-*



(a) Вектор угла поворота (b) Вектор угловой скорости

Рис. 4.1. Вращательное движения материальной точки

нопеременным. В этом случае справедливы следующие уравнения движения:

$$\begin{cases} \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \dfrac{\vec{\beta} t^2}{2}, \\ \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta} t. \end{cases} \tag{4.4}$$

Вращательные и поступательные характеристики движения связаны друг с другом в векторном виде так:

$$\begin{cases} d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi} \times \vec{r}\right], \\ \vec{v} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right], \\ \vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right], \\ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}. \end{cases} \tag{4.5}$$

При этом в силу перпендикулярности вектора угла поворота и перемещения $(d\vec{\varphi} \perp d\vec{r})$ очевидны следующие скалярные равенства:

$$\begin{cases} dr = r\,d\varphi, \\ v = \omega r, \\ a_\tau = \beta r, \\ a_n = \omega^2 r. \end{cases} \tag{4.6}$$

Задачи

№ 1. Длина минутной стрелки башенных часов Московского университета равна 4.5 м. Найти линейную скорость конца стрелки и его центростремительное ускорение. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки больше угловой скорости суточного вращения Земли?

№ 2. Найти линейную скорость и ускорение точек земной поверхности на географической широте φ, вызванную суточным вращением Земли вокруг своей оси. Радиус земного шара считать равным $R_З = 6400$ км.

№ 3. Найти средние угловую и линейную скорости искусственного спутника Земли, если период его обращения по орбите составляет 111 мин, а средняя высота полёта 1200 км. Определить также среднее значение его нормального ускорения на орбите.

№ 4. Автомобиль, движущийся со скоростью $v = 40$ км/ч, проходит закруглённый участок шоссе с радиусом кривизны $R = 200$ м. На повороте шофёр тормозит машину, сообщая ей ускорение $a = 0.3$ м/с^2. Найти нормальное и полное ускорение автомобиля на повороте. Как направлен вектор полного ускорения по отношению к радиусу кривизны закругления шоссе?

№ 5. Частота вращения воздушного винта самолёта 1500 об/мин. Сколько оборотов делает винт на пути 90 км при скорости полёта 180 км/ч?

№ 6. Точка, лежащая на ободе маховика, имеет линейную скорость $v = 2$ м/с, а точка, лежащая на 10 см ближе к оси вращения, движется со скоростью $v/4$. Чему равен радиус маховика?

№ 7. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 20$ см с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Через какое время t после начала движения центростремительное ускорение a_n будет больше a_τ в 2 раза?

№ 8. Маховик радиусом 1 м из состояния покоя приводится в движение. Точка, находящаяся на ободе, имеет уравнение движения $S = 0.2\,t^2$ м. Через некоторое время точки на ободе имеют линейную скорость $v = 5$ м/с. Для этого момента времени определите нормальное и тангенциальное ускорения точек обода; угловые скорость и ускорение маховика; сколько оборотов сделает маховик с начала движения и через сколько секунд это произойдёт. Постройте годограф скорости.

№ 9. Шкив, диаметром 10 см, вращаясь с угловой скоростью 50 рад/с, прекращает вращение под действием силы трения за 10 с. Сколько оборотов он сделал до остановки? С какой скоростью движется ремень на шкиве в момент времени 8 с?

Домашнее задание

№ 1. Материальная точка равномерно вращается по окружности с линейной скоростью $v = 2.5$ м/с. Найдите среднюю скорость перемещения точки за четверть и половину периода.

№ 2. Найти линейную скорость Земли, вызванную её орбитальным движением. Считать средний радиус земной орбиты равным $\overline{r} \approx 1.5 \cdot 10^8$ км.

№ 3. Автомобиль движется со скоростью 60 км/ч. Сколько оборотов в секунду делают его колеса, если они катятся по шоссе без скольжения, а внешний диаметр покрышек колёс равен 60 см. Какова величина нормального ускорения внешнего слоя резины на покрышках?

№ 4. При вращении тела по окружности угол между полным ускорением $\vec{a}$ и линейной скоростью $\vec{v}$ равен $\alpha = 30°$. Каково численное значение отношения a_n/a_τ?

№ 5. Разматывая верёвку и вращая без скольжения вал ворота, ведро опускается в колодец с ускорением 1 м/с^2. С каким угловым ускорением вращается вал ворота? Как зависит от времени угол поворота вала? Радиус вала ворота равен 25 см.

№ 6. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\beta = 2$ с$^{-2}$. Через $t = 1$ с после начала движения полное линейное ускорение точек на ободе колеса равно $a = 2.7$ м/с^2. Определите угол, составляемый вектором полного линейного ускорения с вектором линейной скорости в этот момент; зависимость пути от времени для точек на ободе колеса; радиус колеса.

СЕМИНАР 5

Кинематика криволинейного движения

Краткая теория

В общем случае траекториями движения материальной точки являются кривые линии, при этом скорость и ускорение — это векторные величины, изменяющиеся как по модулю, так и по направлению. Такой вид движения называют *криволинейным движением*. Вращение материальной точки по окружности является частным случаем криволинейного движения. Криволинейное движение всегда можно рассматривать как сумму поступательного и вращательного движений.

Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором величина скорости всегда остаётся постоянной: $v = \text{const}$. Тогда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{5.1}$$

а вектор ускорения $\vec{a}$ всегда направлен при этом по нормали к траектории точки.

Пусть в начальный момент времени $(t = 0)$ точка находится на расстоянии S_0 от начала отсчёта. Тогда пройденный точкой путь за время t в случае равномерного криволинейного движения определяется так:

$$\Delta S = S(t) - S_0 = vt. \tag{5.2}$$

Равнопеременным называется такое криволинейное движение, при котором касательное ускорение всегда остаётся постоянным: $a_\tau = \text{const}$. Закон движения материальной точки при этом имеет вид:

$$\begin{cases} S(t) = S_0 + v_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}, \\ v(t) = v_0 + a_\tau t. \end{cases} \tag{5.3}$$

Задачи

№ 1. Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой AB. Угол между плоскостями $\alpha = 30^\circ$. Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки A с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\beta = 60^\circ$ к прямой AB. В ходе движения шайба съезжает на прямую AB в точке B. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние AB.

№ 2. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной дороге с постоянной скоростью v_0 (рис. 5.1). Найдите горизонтальную компоненту v_x линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальную компоненту v_y этой скорости и модуль полной скорости для этой же точки. Найти значение угла α между вектором полной скорости точек на ободе колеса и направлением поступательного движения его оси. Показать, что направление вектора полной скорости произвольной точки A на ободе колеса всегда перпендикулярно к прямой AB и проходит через высшую точку точку катящегося колеса. Показать, что для точки A: $v_{\text{полн}} = BA\,\omega$. Построить график распределения скоростей для всех точек на вертикальном диаметре (в данный момент времени) катящегося без скольжения колеса (см. рис. 5.1).

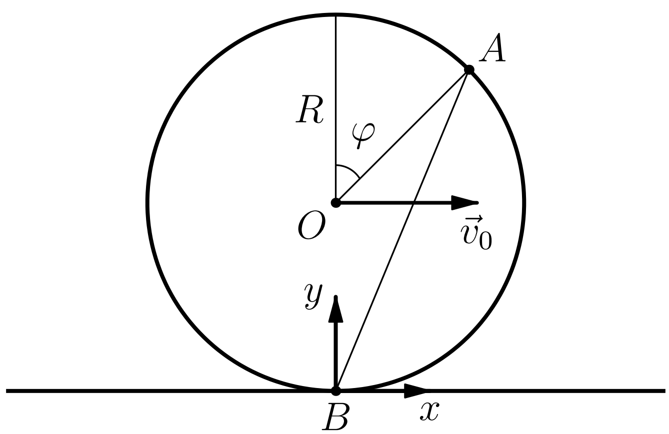


Рис. 5.1.

Выразить все искомые величины через v_0, R и угол φ, составленный верхним вертикальным радиусом колеса и радиусом, проведённым из центра колеса O в исследуемую точку его обода A.

Указание. Движение точек обода колеса можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью $\vec{v}_0$ оси колеса и вращения вокруг этой оси. Для этих точек при отсутствии скольжения колеса модули векторов скорости поступательного движения и линейной скорости, обусловленной вращением, равны друг другу.

№ 3. Автомобиль движется по шоссе так, что зависимость его скорости от времени определяется уравнением $v = (1 + 5t), [v] = \text{м}/\text{с}$. Небольшой камешек застрял в узоре протектора автомобильной шины радиусом 40 см.

Определить:

1) зависимость от времени относительно неподвижного наблюдателя скорости камешка в моменты его касания с землёй и при наибольшем его удалении от земли;
2) линейное ускорение камешка и угловое ускорение колеса через 0.5 с после начала движения;
3) число оборотов, сделанных колесом за 2 с от начала движения автомобиля.

№ 4. Колесо радиуса R равномерно катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью $\vec{v}$ (рис. 5.2). Найти координаты x и y произвольной точки A на ободе колеса, выразив их как функции времени t или угла поворота колеса φ, полагая, что при $t = 0$: $\varphi = 0$, $x = 0$, $y = 0$. По найденным выражениям для x и y построить график траектории точки на ободе колеса (см. рис. 5.2).

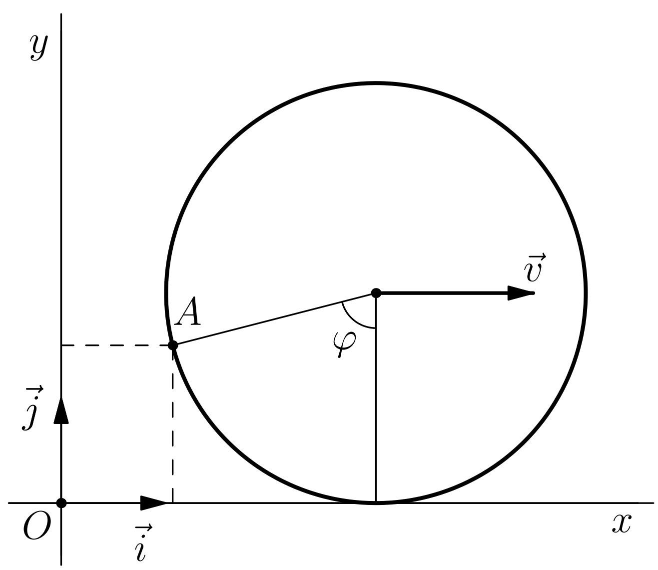


Рис. 5.2.

№ 5. Автомобиль движется без проскальзывания по горизонтальной дороге с постоянной скоростью v_0. На какую высоту $h_{\max}$ над поверхностью дороги забрасываются капли грязи от колёс, радиус которых равен R?

№ 6. Смещение материальной точки по двум взаимно перпендикулярным направлениям описывается уравнениями: $x(t) = x_0 \cos(\omega_x t)$ и $y(t) = y_0 \sin(\omega_y t)$.

Определить:

1) уравнение траектории движения $y(x)$ и характер движения точки;

2) линейные скорость и ускорение движения;
3) тангенциальное и нормальное ускорения.

Задачу решить для нескольких случаев:

а) $x_0 = y_0, \quad \omega_x = \omega_y$,
б) $y_0 = 2x_0, \quad \omega_x = \omega_y$,
в) $x_0 = y_0, \quad \omega_y = 2\omega_x$.

№ 7. Кинооператор, снимая через телеобъектив поднимающийся самолёт, вращает свою камеру вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_1 и вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_1/5$. Вращению вокруг какой одной мгновенной оси эквивалентны эти два движения камеры? Вращение с какой угловой скоростью вокруг этой одной оси могло бы заменить указанные два вращения?

№ 8. Снаряд выпущен горизонтально вперёд со скоростью $\vec{v}$ из орудия, находящегося на самолёте, летящем со скоростью $\vec{V}$ под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти уравнения траекторий: снаряда относительно земли; снаряда относительно самолёта; самолёта относительно снаряда.

№ 9. Концы твёрдого стержня AB могут свободно скользить по сторонам прямого угла AOB (см. рис. 5.3). Какую траекторию описывает точка P стержня, делящая его на части AP и BP, длины которых численно равны a и b?

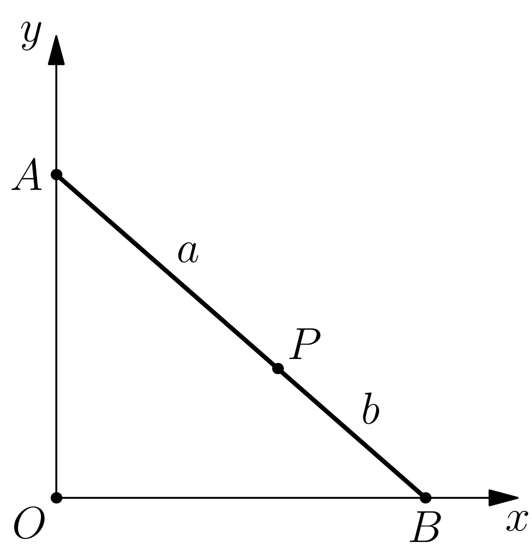


Рис. 5.3.

Домашнее задание

№ 1. Точка движется по окружности радиуса R с постоянным тангенциальным ускорением a_τ, но без начальной скорости. Найти нормальное и полное ускорение точки, выразив их:
1) как функцию от времени t и ускорения a_t;
2) как функцию от углового ускорения β и угла поворота φ радиус-вектора точки из его начального положения.

Также найти угол α между направлением вектора полного ускорения точки и её радиус-вектором.

№ 2. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени определяется уравнением: $\alpha = (1 + 2t - 2t^2)$. Нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, к концу второй секунды движения равно 200 м/с^2. Определите зависимость от времени угловой и линейной скоростей, углового и полного линейного ускорений для точек, лежащих на ободе колеса, а также радиус колеса.

№ 3. Снаряд вылетает со скоростью $v_0 = 100$ м/с из пушки, стоящей у основания горы, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом, под углом $\beta = 30^\circ$ к поверхности горы. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите максимальный и минимальный радиусы кривизны траектории снаряда.

№ 4. Две частицы движутся с ускорением $\vec{g}$ в однородном поле тяжести. В начальный момент частицы находились в одной точке и имели скорости $v_1 = 3$ м/с и $v_2 = 4$ м/с, направленные горизонтально и в противоположные стороны. Найдите расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярными.

СЕМИНАР 6

Масса. Сила. Законы Ньютона

Краткая теория

Все тела в природе взаимодействуют друг с другом, в результате этого характер их движения изменяется либо возникают деформации или механические напряжения. В настоящее время выделяют четыре основных фундаментальных взаимодействия:

1) гравитационное;
2) электромагнитное;
3) сильное;
4) слабое.

Во всех чисто механических процессах проявляются гравитационное и электромагнитное взаимодействия. Сильные и слабые реакции играют большую роль в физике микрочастиц и высоких энергий.

Сила — это векторная физическая величина, направление и модуль которой определяют воздействие на данное тело со стороны других тел. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон: $[\vec{F}\,] = 1$ Н.

Опыт показывает, что действие одной и той же силы на различные тела оказывается различным. Каждое тело «сопротивляется» воздействию на него других тел. Это свойство называется *инертностью*. Количественной характеристикой инертности тела является его *масса*. Чем больше масса тела, тем меньшее воздействие на него оказывает данная сила. Единицей измерения массы в системе СИ является килограмм: $[m] = 1$ кг.

Основу динамики составляют три закона Ньютона.

Закон 1 (I закон Ньютона)**.** *В инерциальной системе отсчёта тело сохраняет состояние своего движения (т. е. покоится или движется равномерно и прямолинейно) в отсутствии действия на него других тел.*

Таким образом, согласно I закону Ньютона существует особый класс систем отсчёта — *инерциальные* системы отсчёта, состояние движения тела в которых может измениться только под действием сил. Системы отсчёта для которых это несправедливо движутся ускоренно и называются *неинерциальными*.

Закон 2 (II закон Ньютона). *В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела m на его ускорение $\vec{a}$:*

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \tag{6.1}$$

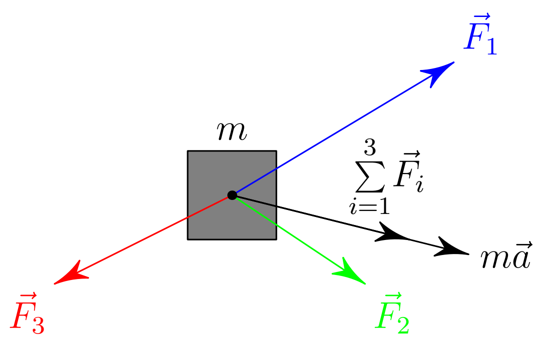


Рис. 6.1. Второй закон Ньютона

Закон 3 (III закон Ньютона). *Силы взаимодействия между телами возникают попарно и одновременно, причём сила с которой одно тело действует на другое равна по величине и направлена противоположно силе действия второго тела на первое:*

$$\vec{F}_{i,k} = -\vec{F}_{k,i}. \tag{6.2}$$

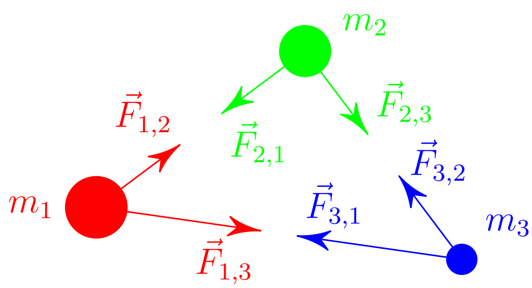


Рис. 6.2. Третий закон Ньютона

Рассмотрим подробнее различные силы, встречающиеся в механике.

Гравитационное взаимодействие проявляется в том, что все тела, обладающие массой, взаимно притягиваются друг к другу с силами, величины которых описываются законом всемирного тяготения, открытым Ньютоном в 1667 году.

Закон 4 (Закон всемирного тяготения)**.** *Два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:*

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{6.3}$$

Коэффициент пропорциональности $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ называется гравитационной постоянной.

Вблизи поверхности Земли на любое тело массы m действует гравитационная сила притяжения со стороны Земли. Однако если высота h, на которой находится тело, достаточно мала по сравнению с радиусом Земли $h \ll R_{\text{З}}$, то гравитационную силу можно заменить приближённой силой тяжести:

$$F = \gamma \frac{M_{\text{З}} m}{(R_{\text{З}} + h)^2} \approx \gamma \frac{M_{\text{З}} m}{R_{\text{З}}^2} = mg. \tag{6.4}$$

Таким образом, на достаточно малых высотах все тела движутся в поле силы тяжести Земли с одинаковым ускорением, называемым *ускорением свободного падения*, направленным к центру Земли и численно равным:

$$g = \gamma \frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5.97 \cdot 10^{24}}{(6.37 \cdot 10^6)^2} = 9.81\ \text{м}/\text{с}^2. \tag{6.5}$$

Если тело, находящееся под действием силы тяжести, подвешено к подвесу или располагается на опоре, то оно действует на подвес или опору с силой, которую называют *весом тела* $\vec{P}$. Сила тяжести и вес — это разные силы, действующие на разные тела! В общем случае они не совпадают численно и могут быть равны по величине только тогда, когда тело покоится либо движется равномерно и прямолинейно по опоре или вместе с подвесом. Вес тела в общем случае всегда можно определить исходя из законов Ньютона:

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}). \tag{6.6}$$

На всякое тело, погружённое в жидкость или газ, действует выталкивающая сила Архимеда, приложенная к центру масс тела и численно равная:

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{ж}} V_{\text{т}} g, \tag{6.7}$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости и $V_{\text{т}}$ — объём тела.

Задачи

№ 1. В лифте установлены пружинные весы, на которых подвешено тело массы $m = 1$ кг. Что будут показывать весы, если лифт:

1) движется вверх с ускорением 4.9 м/с^2, направленным вниз;
2) движется вниз с ускорением 4.9 м/с^2, направленным вверх;
3) движется вниз, ускорение направлено вниз и равно 1 м/с^2.

№ 2. На гладком горизонтальном столе лежат 6 одинаковых кубиков с массой 1 кг каждый (см. рис. 6.3). Постоянная сила $F = 10$ Н действует на первый кубик. Найти результирующую силу f, действующую на каждый кубик. Укажите на рисунке стрелками силы, действующие на соприкасающихся гранях каждых двух кубиков. С какой силой $f_{5,4}$ четвёртый кубик действует на пятый?

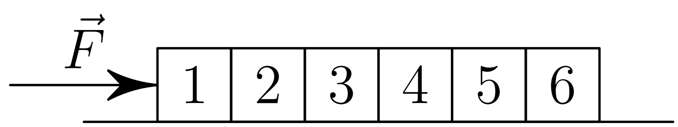


Рис. 6.3.

№ 3. Доска лежит горизонтально на двух опорах, расположенных под её концами. Посередине доски лежит покоящееся тело. Какие силы действуют на это тело? Какие силы действуют на доску и на опоры? При рассмотрении этих вопросов собственным весом доски можно пренебречь.

№ 4. На доске, описанной в предыдущей задаче, стоит человек. Внезапно он приседает. Что произойдёт в первый момент: увеличится или уменьшится прогиб доски? Что произойдёт, если человек сидел на корточках и внезапно выпрямился?

№ 5. Лошадь равномерно тянет сани. Рассмотреть взаимодействие трёх тел: лошади, саней и поверхности земли. Начертить векторы сил, действующих на каждое из этих тел в отдельности, и установить соотношение между ними.

№ 6. Как изменятся соотношения между силами в примере, разобранном в предыдущей задаче, если лошадь и сани движутся с ускорением a? Найти величину всех сил, если $a = 20$ см/с^2. Масса саней с грузом $M = 0.5$ т, масса лошади $m = 0.35$ т и коэффициент трения саней о снег 0.2.

№ 7. Два трактора, идущих по берегам прямого канала с постоянной скоростью, тянут баржу при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов равны 800 Н и 960 Н; угол между ними равен 60°. Найти сопротивление воды, испытываемое баржой при её движении, если баржа движется параллельно берегам.

№ 8. Воздушный шар, удерживаемый двумя тросами, находится под действием ветра. Тросы образуют между собой прямой угол: плоскость, в которой они находятся, составляет с плоскостью горизонта угол 60°. Направление ветра перпендикулярно линии пересечения этих плоскостей и параллельно поверхности земли. Масса шара и заключённого в нём газа $M = 250$ кг, объём шара $V = 215.4$ м^3, масса 1 м^3 воздуха равна 1.3 кг. Определить силы натяжения тросов T_1 и T_2, а также равнодействующую сил давления ветра на шар, считая, что линии действия всех сил, приложенных к шару, пересекаются в его центре.

Домашнее задание

№ 1. Мяч после удара футболиста летит вертикально вверх. Определите, с какими телами он взаимодействует, изобразите и сравните силы, действующие на мяч:

1) в момент удара;
2) во время полёта мяча вверх;
3) во время полёта мяча вниз;
4) при ударе о землю.

№ 2. Изобразите и сравните силы, действующие на автомобиль, когда он:

1) стоит неподвижно на горизонтальном участке дороги;
2) трогается с места;
3) движется равномерно и прямолинейно по горизонтальному шоссе.

№ 3. Два мальчика тянут верёвку в разные стороны, прилагая силы 100 Н каждый. Верёвка может выдержать, не разрываясь, груз весом 150 Н. Разорвётся ли верёвка?

СЕМИНАР 7

Движение под действием постоянных сил

Краткая теория

Существует два основных типа задач динамики: *прямая* и *обратная*. Прямая задача состоит в вычислении сил, действующих на тело по его известному закону движения, обратная — это определение закона движения тела по заданным силам.

Универсальный метод решения этих задач основан на применении законов Ньютона, введённых в семинаре 6. При этом следует придерживаться следующего алгоритма.

Этапы решения задач:

1. Установить в общих чертах условия задачи.
2. Сделать чертёж, поясняющий описанный в задаче процесс.
3. Выбрать систему отсчёта.
4. Выявить тела, существенно влияющие на движение рассматриваемого тела (т. е. выявить наиболее существенные силы, действующие на рассматриваемое тело в данной задаче).
5. Нарисовать силы взаимодействия. Помнить, что при контакте тела с поверхностью возникают обычно две силы: сила реакции опоры и сила трения. Сила трения при движении направлена против относительной скорости тела (тормозящая сила трения), а сила реакции — перпендикулярно к поверхности. Направление силы трения покоя определяется исходя из условия задачи.
6. Записать в векторной форме второй закон Ньютона применительно к данной задаче.
7. Записать второй закон Ньютона в виде проекций на выбранные координатные оси.

8. Если количество неизвестных больше, чем число уравнений, то дополнить систему уравнениями из условия задачи или основными уравнениями кинематики.
9. Решить систему уравнений.
10. Если в системе есть трение, то прежде решить задачу (хотя бы мысленно) без трения для определения направления скорости.

Задачи

№ 1. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом 0.1. Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с неё соскользнуть?

№ 2. К телу массы 3 кг, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой прикреплён к точке A. Какое ускорение надо сообщить точке A, поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвётся при натяжении $T = 42$ Н. Как изменится это ускорение, если тянуть тело вдоль стола?

№ 3. Тело массы m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Найти приращение импульса $\Delta\vec{p}$ тела за первые t секунд движения и модуль приращения импульса тела за все время движения.

№ 4. На криволинейных участках железнодорожного пути возвышают наружный рельс над внутренним для того, чтобы сила давления проходящего поезда на рельсы была направлена перпендикулярно полотну дороги. Определить величину h возвышения наружного рельса над внутренним при следующих данных: радиус закругления 400 м, скорость поезда 10 м/с, расстояние между рельсами 1.6 м.

№ 5. Воздушный шар массы M опускается с постоянной скоростью. Какое количество балласта ΔM надо выбросить, чтобы шар начал подниматься с той же скоростью? Подъёмную силу шара считать постоянной и известной.

№ 6. По наклонной плоскости с углом φ к горизонту под действием силы тяги $\vec{F}_{\text{тяги}}$, направленной под углом α к наклонной плоскости, соскальзывает брусок массы m. Пусть в некоторый момент времени брусок находится в положении **I** и имеет скорость v_1. Какую скорость брусок будет иметь через малое время Δt? На брусок действует сила трения со стороны наклонной плоскости, равная $\vec{F}_{\text{тр}}$. Задачу решить тремя способами.

№ 7. По наклонной плоскости с углом наклона α скользит тело. Сила трения между телом и плоскостью пропорциональна силе нормального давления тела на плоскость и не зависит от скорости тела. Коэффициент трения между трущимися поверхностями тела и плоскости равен μ. Найти ускорение, с которым скользит тело.

№ 8. Несколько наклонных плоскостей имеют общее основание. Каков угол наклона плоскости к горизонту, если время соскальзывания тела по этой плоскости меньше, чем по остальным плоскостям? Коэффициент трения между телом и плоскостями равен μ.

№ 9. Шайбу поместили на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 10^\circ$ с горизонтом. Если шайбе сообщить некоторую начальную скорость вверх по плоскости, то она до остановки проходит путь s_1; если же сообщить ту же начальную скорость вниз, то путь до остановки равен s_2. Найти коэффициент трения, зная, что $s_2 = 4s_1$.

№ 10. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска 1 и 2 (первый ниже второго). Массы брусков m_1 и m_2, коэффициент трения между плоскостью и этими брусками μ_1 и μ_2, причём $\mu_1 < \mu_2$. Найти:

1) силу взаимодействия между брусками при движении;
2) угол α, при котором скольжения не будет.

Домашнее задание

№ 1. В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

№ 2. На столе лежит доска массы $M = 1$ кг, а на доске — груз массы $m = 2$ кг. Какую силу нужно приложить к доске в горизонтальном направлении, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской 0.25, а между доской и столом 0.5.

№ 3. От поезда, идущего с постоянной скоростью, отрывается последний вагон, который проходит путь L и останавливается. На каком расстоянии от вагона в момент его остановки будет находиться поезд, если тяга паровоза постоянна, а трение каждой части поезда не зависит от скорости и пропорционально её весу?

№ 4. Аэростат, массы $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0.2$ м/с^2. Определите массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх.

№ 5. Небольшое тело пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъёма тела оказалось в два раза меньше времени спуска.

№ 6. Брусок массы m тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ. Найти угол α нити относительно горизонта, при котором натяжение нити минимально. Чему оно равно?

СЕМИНАР 8

Нерастяжимые и невесомые нити

Краткая теория

Несмотря на то что в природе не существует абсолютно нерастяжимых и невесомых нитей, в физике часто используется такая математическая модель. Это связано с тем, что во многих практических задачах можно пренебречь изменением длины нити по сравнению с расстояниями между телами, которые она связывает, а также массой нити по сравнению с массой остальных тел.

Кроме того, в ряде случаев можно пренебрегать массой блоков по сравнению с массами поднимаемых с их помощью тел. При этом их упрощённо также считают невесомыми.

Очевидно, что все указанные допущения справедливы не для любой задачи, но в большинстве ситуаций данные условия позволяют упростить решение.

Задачи

№ 1. Выяснить, что следует из условий нерастяжимости нити, а также невесомости нити и блока? Для ответа на эти вопросы решить задачу о движении системы из двух грузов массами m_1 и m_2, связанных нерастяжимой и невесомой нитью для двух случаев:

1) на груз m_1 в горизонтальном направлении действует сила $\vec{F}$ и оба тела располагаются на гладкой горизонтальной поверхности;
2) нить, связывающая грузы m_1 и m_2, переброшена через невесомый блок.

№ 2. Детально исследовать движение системы грузов, изображённой на рис. 8.1, в двух случаях: в отсутствии трения ($\mu = 0$) и при его наличии.

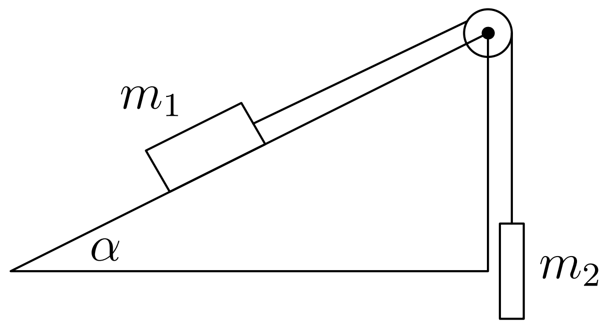


Рис. 8.1.

Угол α и коэффициент трения μ известны, массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Вначале оба тела неподвижны. Найти отношение масс m_2/m_1, при котором тело m_2 начнёт:

1) опускаться;
2) подниматься.

№ 3. В установке, изображённой на рис. 8.2, массы тел равны m_0, m_1 и m_2, массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в блоке нет. Найти ускорение $\vec{a}$, с которым опускается тело m_0, и силу натяжения нити, связывающей тела m_1 и m_2, если коэффициент трения равен μ.

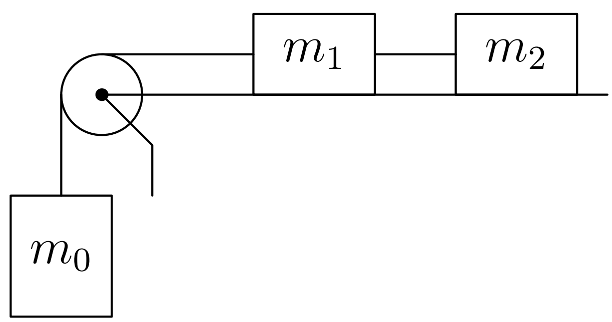


Рис. 8.2.

№ 4. На машине Атвуда движутся грузы масс m_1 и m_2. Через промежуток времени t после начала движения тело m_1 опустилось на n-ю часть того расстояния, которое оно прошло бы за то же время при свободном падении. Каково отношение масс m_1 и m_2?

№ 5. Система грузов находится на машине Атвуда (см. рис. 8.3). Грузы m_2 и m_3 соединены пружиной. Систему удерживали за груз m_1, а затем отпустили. Какие ускорения будут у грузов m_1 и m_3 в начальный момент движения?

№ 6. Грузы, массы которых $m_1 = 2$ кг и $m_3 = 3$ кг, висят на нити, перекинутой через невесомые блоки (см. рис. 8.4). К подвижному блоку прикреплён груз массой $m_2 = 4$ кг. В начальный момент все грузы закреплены и находятся на

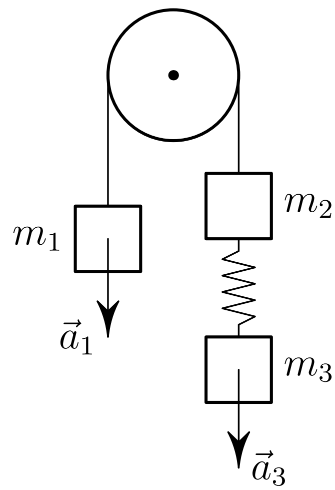


Рис. 8.3.

одной высоте, потом грузы одновременно освобождают. Пренебрегая трением, определите:

1) натяжение нити;
2) ускорение каждого груза относительно Земли;
3) расстояние между грузами через 1 с после начала движения;
4) расстояние, на которое опустится подвижный блок за это время.

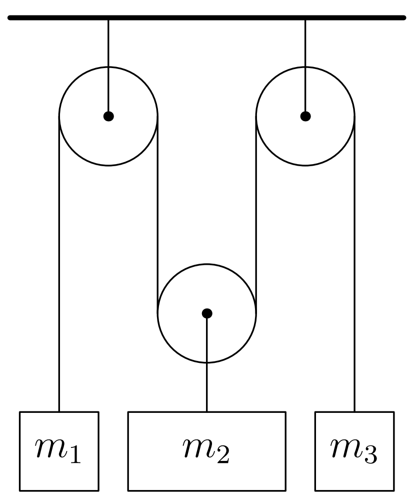


Рис. 8.4.

Домашнее задание

№ 1. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M. Другое тело массы m подвешено на нити, перекинутой через блок и привязанной к телу массы M. Найти ускорения тел и натяжение нити. Трением тела массы M о плоскость и трением в блоке, а также массами блока и нити пренебречь.

№ 2. На нити, перекинутой через блок A, подвешены две неравные массы m_1 и m_2. Найти ускорение масс, натяжение нити T и силу f, действующую на ось блока. Блок и нить считать невесомыми, трение в оси блока не учитывать.

№ 3. Найти ускорения a_1 и a_2 грузов m_1 и m_2, а также натяжение нити T в системе, изображённой на рис. 8.5. Массой блоков и нитей пренебречь. Как изменится решение задачи, если учесть массу блоков?

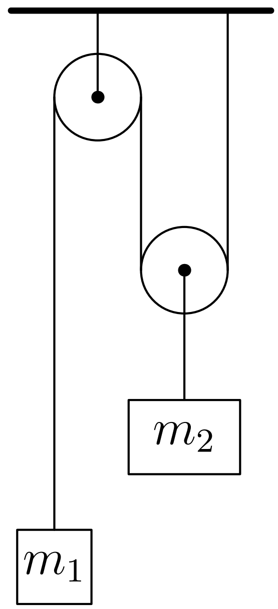


Рис. 8.5.

СЕМИНАР 9

Движение тел со взаимными ускорениями

Краткая теория

При решении задач динамики в неинерциальных системах отсчёта (НСО) необходимо использовать модифицированный второй закон Ньютона:

Закон 5 (II закон Ньютона в НСО)**.** *В неинерциальной системе отсчёта произведение массы тела m на его относительное ускорение $\vec{a}\,'$ в данной системе равно векторной сумме всех сил, действующих на тело, вместе с которыми необходимо учесть силу инерции:*

$$m\vec{a}\,' = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{\textit{инерции}}. \tag{9.1}$$

Сила инерции — это искусственно введённая сила, связанная с тем, что тело находится в неинерциальной системе отсчёта. Различают две силы инерции: *переносную* и *кориолисову* силы:

$$\vec{F}_{\textit{инерции}} = \vec{F}_{\text{пер}} + \vec{F}_{\text{кор}}. \tag{9.2}$$

Рассмотрим две системы отсчёта: инерциальную систему отсчёта $Oxyz$ и неинерциальную систему $O'x'y'z'$. Пусть система $O'x'y'z'$ совершает вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, причём ось вращения движется со скоростью $\vec{v}_0$ относительно системы $Oxyz$. Положение материальной точки в системе $O'x'y'z'$ определяется радиус-вектором $\vec{r}\,'$, а её скорость в этой системе равна $\vec{v}\,'$. Тогда переносная сила инерции равна:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\frac{d\vec{v}_0}{dt} - m\omega^2\vec{\rho} - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'\right], \tag{9.3}$$

здесь $\vec{\rho}$ — вектор, опущенный перпендикулярно из конца $\vec{r}\,'$ на ось вращения системы $O'x'y'z'$.

Кориолисова сила инерции:

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m\left[\vec{\omega} \times \vec{v}\,'\right]. \tag{9.4}$$

Этапы решения задач:

1. Проделать шаги алгоритма, описанного в семинаре 7 и получить систему уравнений.
2. Для нахождения связи между ускорениями движущихся сил ввести относительные перемещения, относительные скорости и относительные ускорения.

Задачи

№ 1. Машина Атвуда уравновешена на равноплечных рычажных весах при заторможенном блоке. Вследствие этого грузы m_1 и m_2, связанные нитью, переброшенной через блок машины, не движутся.

1. В какую сторону нарушится равновесие весов, если освободить тормоз блока?
2. Как уравновесить весы при движущихся массах m_1 и m_2?

№ 2. Найти ускорение массы m_1 и натяжения нитей T_1 и T_2 в системе, изображённой на рис. 9.1. Массой блоков и нитей пренебречь, сил трения не учитывать.

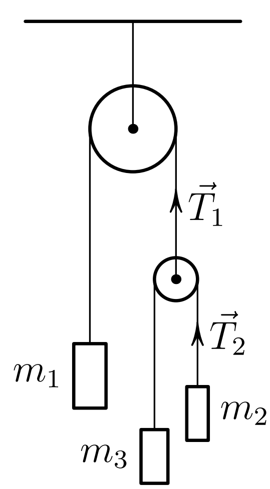


Рис. 9.1.

№ 3. По наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, скользит без трения клин, верхняя плоскость которого горизонтальна (см.

рис. 9.2). По горизонтальной поверхности клина скользит груз массой m. Коэффициент трения скольжения между грузом и клином $\mu = 0.1$.

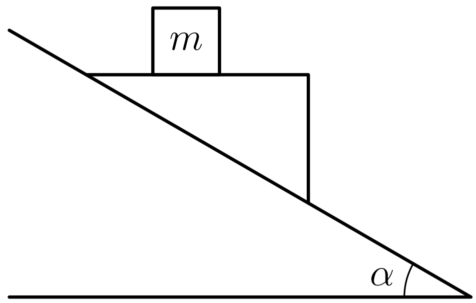


Рис. 9.2.

Определите ускорение груза относительно Земли в горизонтальном направлении. При каком максимальном угле α груз перестанет скользить по поверхности клина?

№ 4. Нить перекинута через лёгкий вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплён груз массы M, а по другой свисающей части нити скользит муфта массы m с постоянным ускорением a' относительно нити. Найти ускорение a груза M и силу трения, с которой нить действует на муфту.

№ 5. Система, изображённая на рис. 9.3, состоит из бруска A и двух тел 1 и 2, связанных невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок, прикреплённый к телу A. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A, чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него?

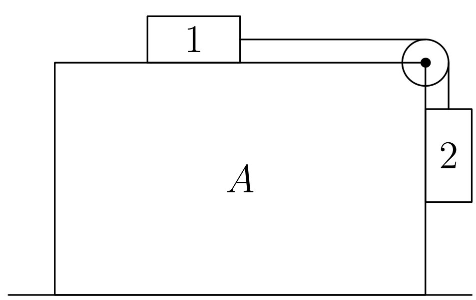


Рис. 9.3.

Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

Домашнее задание

№ 1. Через блок, прикреплённый к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы масс m_1 и m_2. Кабина начинает опускаться с ускорением $\vec{a}_0$. Пренебрегая массой блока, найти:

1) ускорение груза m_1 относительно кабины лифта;
2) силу, с которой блок действует на потолок кабины.

№ 2. В системе, показанной на рис. 9.4, массы тел равны m_0, m_1, m_2, трения нет, массы блоков пренебрежимо малы.

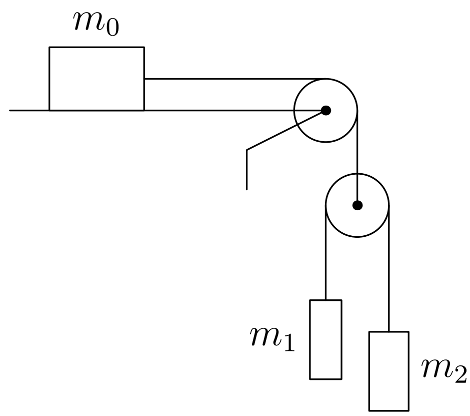


Рис. 9.4.

Найти ускорение тела m_1.

СЕМИНАР 10

Действие переменных сил

Краткая теория

В общем случае, когда действующие в системе силы изменяются со временем, характер движения системы оказывается достаточно сложным, однако законы Ньютона не теряют своего значения. В задачах такого типа второй закон Ньютона в ИСО — это векторно-дифференциальное уравнение следующего вида:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \tag{10.1}$$

где $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ — это равнодействующая внешних сил, которая в общем случае может зависеть от времени, положения и скорости тела.

В случае когда внешняя сила $\vec{F}$ — известная функция положения тела $\vec{r}$, для упрощения интегрирования уравнения (10.1) можно рассматривать скорость как сложную функцию времени. Это позволяет привести производную скорости по времени к следующему виду:

$$\frac{d\vec{v}(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dv^2}{d\vec{r}}. \tag{10.2}$$

Задачи

№ 1. Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массы m при её движении в плоскости Oxy по закону: $x(t) = A\sin\omega t$, $y(t) = B\cos\omega t$.

№ 2. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два бруска масс m_1 и m_2, которые соединены нитью. К брускам в момент $t = 0$ приложили силы, противоположно направленные и зависящие от времени как $F_1 = \alpha_1 t$ и $F_2 = \alpha_2 t$. Найти, через сколько времени нить порвётся, если сила натяжения на разрыв равна $T_{\text{пр}}$.

№ 3. Поршень двигателя внутреннего сгорания совершает горизонтальные колебания согласно закону

$$x(t) = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right),$$

где r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω — постоянная по величине угловая скорость вала. Определить наибольшее значение силы, действующей на поршень, если масса последнего равна m.

№ 4. Шарик, масса которого равна 100 г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением

$$x(t) = 4.9\,t - 2.45\,(1 - e^{-2t}),$$

где x измеряется в метрах, а t — в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить её как функцию скорости шарика.

№ 5. Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β — положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значения силы F в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

№ 6. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = \alpha t$, где α — постоянная. Найти зависимости от t ускорений доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ. Изобразить примерные графики этих зависимостей.

№ 7. На покоящуюся частицу частицу массы m в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени t по закону $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$, где $\vec{b}$ — постоянный вектор, τ — время, в течение которого действует данная сила.

Найти:

1) импульс частицы после окончания действия силы;
2) путь, пройденный частицей за время действия силы.

№ 8. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k — постоянная, s — пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

№ 9. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $\mu = \gamma x$, где γ — постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и его максимальную скорость.

№ 10. В момент времени $t = 0$ частице сообщили начальную скорость $\vec{v}_0$, и она начала двигаться под действием силы сопротивления среды, пропорциональной её скорости как $\vec{F} = -k\vec{v}$.

Найти:

1) время движения частицы под действием этой силы;
2) скорость частицы в зависимости от пройденного ею пути, а также полный путь до остановки.

Домашнее задание

№ 1. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ лежит тело массы m. В момент времени $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, зависящую от времени как $\vec{F} = \vec{b}t$, где $\vec{b}$ — постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы.

№ 2. На тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = kt$, где k — постоянная. Направление этой силы всё время составляет угол α с горизонтом.

Найти:

1) скорость тела в момент отрыва от плоскости;
2) путь, пройденный телом к этому моменту.

№ 3. Пуля, пробив доску толщины h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

СЕМИНАР 11

Динамика вращательного движения точки

Краткая теория

Этапы решения задач:

1. При выборе системы отсчёта удобнее всего направить одну из осей перпендикулярно плоскости вращения, вторую — по направлению вектора линейной скорости, третья составляет с ними правую тройку.
2. Проделайте процедуры семинара 7 и получите систему уравнений. При решении системы уравнений необходимо использовать уравнения связи между кинематическими величинами поступательного и вращательного движения.
3. Помните, что при движении по окружности ускорение материальной точки можно разложить на тангенциальную и нормальную составляющие:

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \\ a_\tau = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = R\,\dfrac{d\omega}{dt}, \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R. \end{cases}$$

Задачи

№ 1. Найти силу, с которой тележка массы m, движущаяся со скоростью $\vec{v}$, давит на мост в каждом из следующих случаев:

1) горизонтальный мост;
2) выпуклый мост с радиусом кривизны R;
3) вогнутый мост с радиусом кривизны R.

Для последних двух случаев силу определить в наивысшей и наинизшей точках моста.

№ 2. Небольшое тело A скользит по гладкой горизонтальной поверхности вдоль стенки, имеющий вид, изображённый на рис. 11.1 (вид сверху).

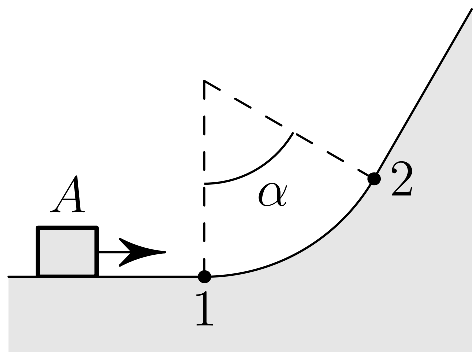


Рис. 11.1.

Закруглённая часть траектории представляет собой дугу с углом $\alpha = 60^\circ$. Найти скорость тела в точке 2, если в точке 1: $v_1 = 6.5$ м/с и коэффициент трения между телом и вертикальной стенкой $\mu = 0.25$.

№ 3. Шарик радиуса R висит на нити длиной L и касается вертикального цилиндра радиусом r, установленного на оси центробежной машины. При какой угловой скорости вращения ω центробежной машины шарик перестанет давить на стенку цилиндра?

№ 4. Велосипедист едет по круглой горизонтальной площадке радиуса R. Коэффициент трения зависит только от расстояния r до центра площадки O как $\mu = \mu_0(1 - r/R)$, где μ_0 — постоянная. Найти радиус окружности с центром в точке O, по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью. Какова эта скорость?

№ 5. На внутренней поверхности конической воронки с углом 2α при вершине, на высоте h от вершины находится малое тело. Коэффициент трения между телом и поверхностью воронки равен μ. Найти минимальную угловую скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси, при которой тело будет неподвижно в воронке.

№ 6. В лифте, движущемся вертикально вверх с ускорением a_0, находится вращающийся с частотой f горизонтальный столик, на котором лежит маленький коробок. Зная, что коэффициент трения коробка о столик равен μ, определить то максимальное расстояние коробка от оси вращения, при котором он ещё будет удерживаться на столике. Найти ускорение коробка относительно земли.

№ 7. Прибор, изображённый на рис. 11.2 (вид сверху) состоит из гладкого Г-образного стержня, расположенного в горизонтальной плоскости, и муфты A массы m, соединённой пружинкой с точкой B.

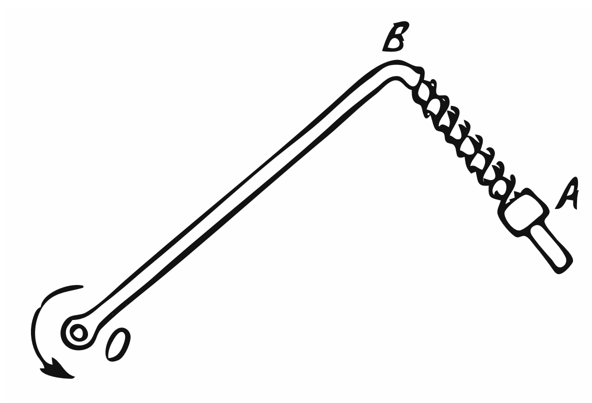


Рис. 11.2.

Жёсткость пружинки равна k. Вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Найти относительное удлинение пружинки. Как зависит результат от направления вращения?

Домашнее задание

№ 1. Самолёт делает «мёртвую петлю» радиуса $R = 100$ м и движется по ней со скоростью $v = 280$ км/ч. С какой силой тело лётчика будет давить на сиденье самолёта в верхней и нижней точках петли?

№ 2. Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом $R = 200$ м при скорости $v = 100$ км/ч?

№ 3. Тело движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0 по горизонтальной поверхности стола, которая имеет закруглённый край с постоянным радиусом закругления, равным R. Каково должно быть минимальное значение скорости v_0, чтобы тело, падая со стола, не касалось закругления?

№ 4. Шарик массы m подвешен на идеальной пружине жёсткости k и начальной длины l_0 над центром платформы центробежной машины. Затем шарик начинает вращаться вместе с машиной с угловой скоростью ω. Какой угол α образует при этом пружина с вертикалью?

СЕМИНАР 12

Динамика тела при плоском движении

Краткая теория

Абсолютно твёрдое тело — это тело, расстояние между любыми двумя точками которого в ходе движения неизменно. Другими словами, данное тело не испытывает деформаций.

Плоским называют частный случай поступательно-вращательного движения абсолютно твёрдого тела, при котором каждая точка тела движется всё время в одной и той же плоскости.

При плоском движении твёрдого тела его кинетическую энергию можно представить в виде суммы двух составляющих: кинетической энергии поступательного движения центра масс тела и кинетической энергии вращательного движения тела как целого относительно центра масс.

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\,\omega^2}{2}. \tag{12.1}$$

Линейное ускорение центра масс тела и угловое ускорение вращения можно найти из второго закона Ньютона для поступательного и вращательного движений:

$$\begin{cases} m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{i\,\text{внеш}}, \\ J_c\vec{\beta} = \sum \vec{M}_{i\,\text{внеш}}. \end{cases} \tag{12.2}$$

Моменты инерции некоторых тел:

1) Материальная точка массы m вращающаяся на расстоянии r от некой оси:

$$J = mr^2.$$

2) Однородный тонкий обруч массы m и радиуса r; ось вращения перпендикулярна плоскости обруча и проходит через центр масс обруча:

$$J_c = mr^2.$$

3) Однородный цилиндр или диск массы m и радиуса r; ось вращения проходит через центр масс вдоль длины:

$$J_c = \frac{1}{2}mr^2.$$

4) Однородный тонкий стержень массы m и длины L; ось вращения проходит через центр масс стержня перпендикулярно его длине:

$$J_c = \frac{1}{12}mL^2.$$

5) Однородный куб с ребром a и массы m; ось вращения проходит через центр масс куба перпендикулярно его граням:

$$J_c = \frac{1}{6}ma^2.$$

6) Однородный шар радиуса r и массы m; ось вращения проходит через центр масс шара:

$$J_c = \frac{2}{5}ma^2.$$

Если необходимо определить момент инерции тела относительно произвольной оси вращения применяют теорему Гюйгенса — Штейнера:

Теорема 3 (Гюйгенса — Штейнера)**.** *Момент инерции тела J_o относительно произвольной оси вращения O всегда можно вычислить как сумму момента инерции тела J_c относительно оси, проходящей через центр масс тела C параллельно оси O и величины ma^2, где a — это расстояние между осями O и C, а масса тела равна m:*

$$J_o = J_c + ma^2. \tag{12.3}$$

Этапы решения задач:

1. Выполнить пять действий, перечисленных в семинаре 7.
2. Написать уравнения Ньютона (12.2) для поступательного движения центра инерции твёрдого тела и вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

3. Записать уравнения Ньютона для поступательного и вращательного движения в виде проекций на оси координат.
4. Если число полученных уравнений меньше числа неизвестных в них, то дополнить систему уравнений, исходя из условий задачи, а также уравнениями связи между кинематическими величинами поступательного и вращательного движения.
5. Решить систему уравнений.

Задачи

№ 1. Определить главные моменты инерции следующих систем материальных точек:

1) линейная двухатомная молекула оксида углерода CO, атомы которой можно считать материальными точками с массами $m_C = 12$ а.е.м. и $m_O = 16$ а.е.м., расположенными на расстоянии $l = 112.8 \cdot 10^{-12}$ м друг от друга. 1 а.е.м. $= 1.66 \cdot 10^{-27}$ кг;
2) однородный цилиндр массы m с радиусом R, внутри которого имеется концентрическая полость радиуса r;
3) однородный параллелепипед массы m с рёбрами a, b и c.

№ 2. Найти ускорение грузов и натяжение нитей на машине Атвуда, учитывая момент инерции I_c вращающегося блока, при условии, что нить не скользит по блоку. Определить усилие в подвеске блока, если масса блока равна M.

№ 3. Маятник Максвелла устроен следующим образом. На валик радиусом r наглухо насажен сплошной диск радиуса R и массы M. Валик и диск сделаны из одного материала, причём выступающие из диска части оси имеют массу m. К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается, а затем предоставляют диску свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

№ 4. С каким ускорением будет опускаться катушка с массой M и моментом инерции I_c относительно оси симметрии, если она подвешена аналогично диску с валиком в предыдущей задаче. На катушку намотаны ещё две нити, к которым подвешен груз массы m. Определить натяжения нитей.

№ 5. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, скатывается без скольжения сплошной однородный цилиндр, масса которого равна 300 г. Найти величину силы трения цилиндра о плоскость.

№ 6. На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток. С каким ускорением будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой F, как показано на рис. 12.1? Каким образом надо тянуть за нитку для того, чтобы катушка двигалась в сторону натянутой нитки? Катушка движется по поверхности стола без скольжения. Найти силу трения между катушкой и столом.

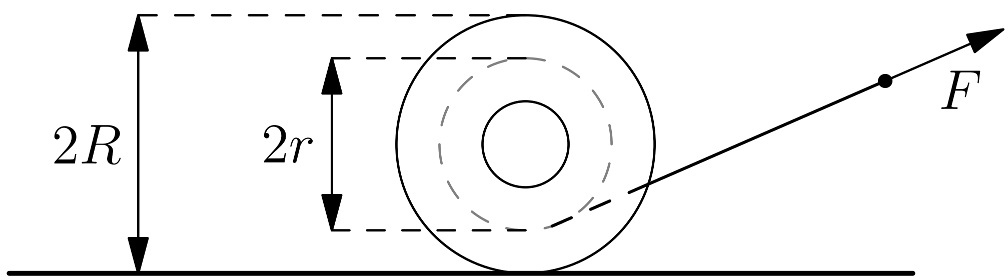


Рис. 12.1.

№ 7. На шероховатой доске на расстоянии L от её правого конца находится сплошной цилиндр. Доску начинают двигать с ускорением a_0 влево. С какой скоростью относительно доски будет двигаться центр цилиндра в тот момент, когда он будет находиться над краем доски? Движение цилиндра относительно доски происходит без скольжения.

Домашнее задание

№ 1. Однородный цилиндр массы M и радиуса R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза массы m, прикреплённого к лёгкой нити, намотанной на цилиндр. Найти угол поворота цилиндра в зависимости от времени $\varphi(t)$, если в начальный момент $\varphi = 0$.

№ 2. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две лёгкие нити, нагруженные массами m_1 и m_2. Найти угловое ускорение блока и натяжения нитей, учитывая момент инерции блока I_c.

№ 3. На горизонтальную неподвижную ось насажен блок, представляющий собой сплошной цилиндр массы M. Через него перекинута невесомая верёвка, на концах которой висят две обезьяны массой m каждая. Первая обезьяна начинает подниматься с ускорением a относительно верёвки. Определить, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат будет двигаться вторая обезьяна.

№ 4. К тележке, стоящей на горизонтальной плоскости, привязана нить, перекинутая через блок, укреплённый у края стола. К концу нити прикреплён груз массы $m_3 = 500$ г. Определить ускорение тележки, если известно, что масса платформы тележки $m_1 = 1.4$ кг, масса каждого колеса $m_2 = 400$ г и колеса представляют собой сплошные диски. Колеса катятся по поверхности стола без скольжения, а трение качения отсутствует.

СЕМИНАР 13

Работа. Мощность. Энергия

Краткая теория

При решении задач всегда необходимо предварительно рассмотреть силы, действующие на тело (или тела) на каждом этапе движения. Следует выяснить по возможности, являются ли они постоянными или переменными. Если на каком-то этапе тела взаимодействуют сложным образом, то решение задачи с помощью второго закона Ньютона становится затруднительным. Тогда для каждого этапа, протекающего в течение некоторого времени, можно воспользоваться одним из следующим законов.

Закон 6 (Закон изменения импульса).

$$d\vec{p} = \sum_i \vec{F}_i \, dt, \qquad \vec{p} - \vec{p}_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_i \vec{F}_i \, dt, \tag{13.1}$$

Необходимо помнить, что закон изменения импульса — векторное равенство, которое можно записать в проекциях на выбранные оси координат. Если импульсом внешних сил в каком-то направлении можно пренебречь в данной задаче (малы сами силы или мала длительность промежутка времени действия силы), то проекция импульса системы на это направление сохраняется.

Закон 7 (Закон изменения кинетической энергии).

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{всех сил}}, \qquad A = \int \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = \int F \cos\left(\vec{F}\,\hat{;}\,d\vec{r}\right) \, dr. \tag{13.2}$$

Закон 8 (Закон изменения полной механической энергии).

$$\Delta E_{\text{мех}} = (T + U)_{\text{кон}} - (T + U)_{\text{нач}} = A_{\text{непотенциальных сил}}. \tag{13.3}$$

Задачи

№ 1. Действуя постоянной силой в 200 Н, поднимают груз массой в 10 кг на высоту 10 м. Какая при этом совершается работа? Какой потенциальной энергией будет обладать поднятый груз?

№ 2. Коэффициент трения между некоторым телом и плоскостью, наклонённой под углом 45° к горизонту, равен 0.2. На какую высоту поднимется это тело, скользя по наклонной плоскости, если ему будет сообщена скорость 10 м/с, направленная вверх вдоль плоскости? Какова будет скорость тела, когда оно вернётся в нижнюю исходную точку своего движения?

№ 3. Какую работу надо совершить, чтобы втащить (волоком) тело массы m на горку с длиной основания L и высотой H, если коэффициент трения между телом и поверхностью горки равен μ? Угол наклона поверхности горки с горизонтом может меняться, но его знак остаётся постоянным.

№ 4. Однородная цепочка длиной 2 м лежит на столе. Если свесить с края стола 18 см этой цепочки, то она начинает соскальзывать вниз. Масса цепочки равна 5 кг. Какая работа против силы трения совершается при соскальзывании всей цепочки? С какой скоростью движется цепочка в тот момент, когда последнее её звено соскользнёт с края стола?

№ 5. Тело массой 50 кг двигалось по горизонтальной поверхности на восток со скоростью 5 м/с. В течение 30 с на тело действовала сила, постоянная по величине и направлению, в результате чего тело начало двигаться на запад со скоростью 10 м/с. Определите величину силы; работу, совершённую над телом; путь, который тело прошло за эти 30 с.

№ 6. Тело массой 1 кг под действием постоянной силы движется прямолинейно по оси x, причём координата тела зависит от времени по следующему закону: $x(t) = 2t^2 + 4t + 1$ (время дано в секундах). Определите работу силы за 10 с от начала её действия; зависимость кинетической энергии от времени и пройденного пути.

№ 7. Тележка массой 0.5 кг и длиной 40 см движется без трения по горизонтальным рельсам со скоростью 1.25 м/с. На передний край тележки осторожно положили небольшое тело массой 100 г, которое через некоторое время остановилось на середине тележки. Определите коэффициент трения между телом и тележкой; время движения тела по тележке; работу против силы трения.

№ 8. На поверхность Земли с очень большого расстояния падает метеорит. С какой скоростью метеорит упал бы на Землю, если бы атмосфера не тормозила его движения? Считать, что начальная скорость метеорита вдали от Земли равна нулю.

№ 9. Дают ли результаты решения предыдущей задачи возможность ответить на вопрос: какой должна быть минимальная скорость ракеты, запущенной с поверхности Земли, для того чтобы она преодолела силу земного тяготения и ушла в межпланетное пространство?

№ 10. С какой скоростью после выстрела, произведённого из винтовки под углом 30° к горизонту, стал двигаться стрелок, стоящий на гладком льду? Масса стрелка с винтовкой и снаряжением составляет 70 кг, а масса пули 10 г и её начальная скорость 700 м/с.

№ 11. Однородный тонкий тяжёлый стержень длины L висит на горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Какую начальную угловую скорость надо сообщить стержню, чтобы он повернулся на 90°?

Домашнее задание

№ 1. Из залитого подвала, площадь пола которого равна 50 м^2, требуется выкачать воду на мостовую. Глубина воды в подвале 1.5 м, а расстояние от уровня воды в подвале до мостовой 5 м. Найти работу, которую необходимо затратить для откачки воды.

№ 2. Горный ручей с сечением потока S образует водопад высотой h. Скорость течения воды в ручье равна v. Найти мощность ручья W.

№ 3. Определить среднюю полезную мощность при выстреле из гладкоствольного ружья, если известно, что пуля массы m вылетает из ствола со скоростью v_0, а длина канала ствола l (давление пороховых газов считать постоянным во всё время нахождения снаряда в канале ствола).

№ 4. Какую мощность W затрачивает лошадь на движение саней, если она тянет их в гору равномерно со скоростью v? Масса саней m и трение между ними и поверхностью горы постоянно, коэффициент трения μ. Угол наклона горы α.

№ 5. Определить потенциальную энергию сжатой пружины U как функцию её деформации, считая, что сила деформации пропорциональна третьей степени величины деформации с коэффициентом пропорциональности β.

№ 6. Маховик радиуса R делает n оборотов в минуту, передавая ремнём приводу мощность W. Найти натяжение ремня T, идущего без скольжения.

СЕМИНАР 14

Соударения тел

Краткая теория

Этапы решения задач:

1. Если система замкнутая, а удар абсолютно упругий, то написать закон сохранения импульса и энергии применительно к условиям решаемой задачи.
2. Изобразив графически закон сохранения импульса системы частиц и воспользовавшись теоремой косинусов, получить квадратичное уравнение относительно скорости.
3. Дополнить задачу уравнениями из условия и решить полученную систему уравнений.
4. Если удар неупругий, то использовать выражение для потери механической энергии (отметим, что суммарный импульс системы сохраняется и в этом случае).
5. Если система незамкнутая, определить, вдоль каких направлений внешние силы не действуют или уравновешены (во время удара!), и записать закон сохранения проекции импульса на данные направления.

Задачи

№ 1. Из пушки, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь L, производится выстрел в горизонтальном направлении. Какова должна быть скорость снаряда для того, чтобы пушка остановилась после выстрела? Выразить искомую скорость снаряда через его массу m, массу пушки M и угол наклона плоскости к горизонту α. Учесть, что $m \ll M$.

№ 2. На гладком горизонтальном столе лежит шар массы m_1, соединённый с пружиной жёсткости k. Второй конец пружины закреплён. Происходит лобовое упругое соударение этого шара с другим шаром, масса которого m_2 меньше m_1, а скорость равна v. В какую сторону будет двигаться второй шар после удара? Определить амплитуду колебаний первого шара после соударения.

№ 3. Найти количество движения, получаемое стенкой при упругом ударе о неё тела массы m, скорость v которого составляет угол α с нормалью к стенке.

№ 4. Определить долю энергии, теряемую частицей массы m_1 при упругом столкновении её с неподвижной частицей массы m_2, если после столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда $m_1 > m_2$) или прямо противоположном (когда $m_1 < m_2$) направлениях. Показать, что доля теряемой энергии не зависит от того, какая частица движется, а какая покоится. При каком соотношении масс m_1/m_2 потеря энергии максимальна? Используя полученные результаты, объяснить, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах лёгких (дейтерий, углерод), а не тяжёлых атомов.

№ 5. Альфа-частица, летящая со скоростью v_0, испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс α-частицы m и ядра M это возможно? Определить скорость α-частицы v и ядра u после столкновения. Определить также угол θ между направлением скорости вылетающего ядра и первоначальным направлением движения α-частицы.

№ 6. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг оси с угловой скоростью ω_1, падает другой диск, вращающийся вокруг оси с угловой скоростью ω_2. Моменты инерции дисков относительно оси вращения равны соответственно I_1 и I_2. Оба диска при ударе сцепляются друг с другом (при помощи острых шипов на их горизонтальных поверхностях). На сколько изменится общая кинетическая энергия вращения систем после падения второго диска? Оси вращения дисков лежат на одной вертикали.

№ 7. С гладкой горизонтальной плоскости, составляющей угол 45° с горизонтом, соскальзывает с высоты h небольшое тело. Как будет двигаться тело, если оно в конце наклонной плоскости встречает

1) упругую горизонтальную плоскость;
2) неупругую, но гладкую горизонтальную плоскость?

№ 8. Лодка массы M с находящимся в ней человеком массы m неподвижно стоит на спокойной воде. Человек начинает идти вдоль по лодке со скоростью $\vec{u}$

относительно лодки. С какой скоростью $\vec{v}'$ будет двигаться человек относительно воды? С какой скоростью $\vec{v}$ будет двигаться при этом лодка относительно воды? Сопротивление воды движению лодки не учитывать.

№ 9. На противоположных концах лодки, описанной в предыдущей задаче, стоят два человека одинаковой массы m и перебрасываются мячом массы Δm. Скорость брошенного мяча относительно воды $\vec{u}$. Найти:

1) скорость движения лодки $\vec{v}$ в течение времени перелёта мяча с одного конца лодки на другой;
2) смещения лодки $\vec{S}_1$ и мяча $\vec{S}_2$ относительно воды после каждого перелёта мяча вдоль лодки, если перемещение мяча вдоль лодки равно $\vec{l}$.

№ 10. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки L. Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

Домашнее задание

№ 1. В шар массы m_1, движущийся со скоростью v_1, ударяется другой шар массы m_2, догоняющий первый в том же направлении со скоростью v_2. Считая удар неупругим, найти скорости шаров после удара и их кинетическую энергию.

№ 2. Навстречу друг другу летят два шара с массами m_1 и m_2. Между шарами происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия одного шара в 20 раз больше кинетической энергии другого. При каких условиях шары после удара будут двигаться в сторону движения шара, обладавшего меньшей энергией?

№ 3. Найти изменение кинетической энергии ΔT и импульса Δp тела, движущегося со скоростью V, при упругом ударе его о стенку, движущуюся в том же направлении равномерно со скоростью $U < V$. При каком соотношении между скоростью тела V и скоростью стенки U ударившееся о неё тело остановится?

№ 4. Баллистический маятник — это маятник, использующийся для определения скорости снаряда. Принцип его действия заключается в том, что снаряд, скорость которого следует измерить, ударяется в тело маятника. Если известны условия удара и массы снаряда и маятника, то по углу отклонения маятника можно вычислить скорость снаряда до удара. Показать, как это сделать для следующих различных случаев:

1) снаряд после удара застревает в маятнике;

2) снаряд отскакивает после удара со скоростью v' назад;

3) снаряд падает вниз, потеряв свою скорость.

Массы маятника M и снаряда m известны. Маятник можно рассматривать как математический длины L.

№ 5. Два маятника в виде шариков разных масс m_1 и m_2 свободно подвешены на нитях разной длины L_1 и L_2 так, что шарики соприкасаются. Первый маятник отводят в плоскости нитей на угол α от первоначального положения и отпускают. Происходит центральный удар шариков. На какие углы α_1 и α_2 относительно отвесной линии отклонятся маятники после удара (углы считать малыми, удар упругим)?

№ 6. Атомное ядро с массой m и кинетической энергией E сталкивается с другим ядром, которое до столкновения покоилось. Происходит ядерная реакция, в результате которой образуются две частицы с массами m_1 и m_2, причём на реакцию затрачивается энергия Q. При каких условиях скорости образовавшихся частиц будут направлены вдоль или против скорости падающей частицы?

№ 7. На носу лодки длиной L стоит человек, держа на высоте h ядро массы m. Масса лодки вместе с человеком равна M. Человек бросает горизонтально ядро вдоль лодки. Какую скорость по горизонтали должен сообщить человек ядру, чтобы попасть в корму лодки? Сопротивление воды движению лодки можно не учитывать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. — М.: Наука, 1970. — 508 с.

2. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 560 с.

3. *Матвеев А. Н.* Курс общей физики. Т. 1. Механика и теория относительности. 3-е изд. — М.: Оникс 21 век, 2003. — 432 с.

4. *Иродов И. Е.* Основные законы механики. 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1985. — 248 с.

5. *Иванов А. Е., Иванов С. А.* Механика. Молекулярная физика и термодинамика — М.: КНОРУС, 2016. — 950 с.

6. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике. 3-е изд. — М.: Наука, 2002. — 448 с.

7. *Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Угаров В. А., Яковлев И. А.* Сборник задач по общему курсу физики. Механика. — М.: Наука, 1977. — 288 с.

8. *Жукарев А. С., Матвеев А. Н., Петерсон В. К.* Задачи повышенной сложности в курсе общей физики — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 192 с.

Учебное издание

Павел Андреевич Макаров, Валерий Михайлович Юркин,
Владимир Сергеевич Власов

МЕХАНИКА

Сборник задач

Выполнено с использованием системы компьютерной вёрстки $\LaTeX 2_\varepsilon$

Системные требования:
ПК не ниже класса Pentium III; 256 МБ RAM; не менее 1,5 ГБ на винчестере; Windows XP с пакетом обновления 2 (SP2); Adobe Acrobat Reader 10 и выше; видеокарта с памятью не менее 32 МБ; экран с разрешением не менее 1024×768 точек; 4-скоростной дисковод (CD-ROM) и выше; мышь.

Редактор *С. Б. Свигзова*
Корректор *Л. Н. Руденко*

1,0 МБ. 1 компакт-диск, пластиковый бокс, вкладыш.
Подписано к использованию 16.09.2016 г. Тираж 100 экз.
Издательский центр СГУ им. Питирима Сорокина
167023, г. Сыктывкар, ул. Морозова, 25
Тел. (8212)31-16-93, 31-03-82.

E-mail: makarovpa@syktsu.ru, ipo@syktsu.ru
http://www.syktsu.ru