Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «СГУ имени Питирима Сорокина»

Лабораторный практикум по дисциплине

Численные методы решения волновых уравнений

для студентов 1 курса магистратуры
направления
Математика и компьютерные науки

Макаров П. А.

Сыктывкар, 2019

Содержание

1 Классификация и канонический вид УЧП 2-го порядка

1. Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение
$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$
Ответ:
$$\begin{cases} v_{\xi\eta} + \dfrac{v_\xi - v_\eta}{6(\xi - \eta)} = 0 & \text{в области } y < 0, \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \dfrac{v_\eta}{3\eta} = 0 & \text{в области } y > 0, \text{эллиптический тип;} \\ u_{yy} = 0 & \text{в области } y = 0, \text{параболический тип.} \end{cases}$$
При этом
$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \quad \eta = y - x - 2\sqrt{x} & \text{в области } y < 0; \\ \xi = y - x, \quad \eta = 2\sqrt{-x} & \text{в области } y > 0; \\ \xi = x, \quad \eta = y & \text{в области } y = 0. \end{cases}$$

2. Привести к каноническому виду уравнение
$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = 0.$$
Ответ: уравнение имеет гиперболический тип,
$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v_\eta = 0,$$
где
$$\xi = x + y; \quad \eta = x - y; \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x + 2y + z\right).$$

3. Привести к каноническому виду уравнение
$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$$
Ответ: уравнение имеет эллиптический тип,
$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32v = 0,$$
где
$$\xi = x; \quad \eta = \frac{-x + y}{2}.$$

4. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$$

Ответ: уравнение имеет параболический тип,

$$v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v = 0,$$

где

$$\xi = x; \quad \eta = x + y.$$

5. Написать программу, определяющую тип УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами с двумя независимыми переменными:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y; u, u_x, u_y) = 0.$$

Программа должна определять тип уравнения по известным значениям параметров `a11`, `a12` и `a22`.

6. Построить с помощью `gnuplot` “карту”, отображающую тип УЧП 2-го порядка с двумя независимыми переменными в заданной области. В данном случае величины a_{11}, a_{12} и a_{22} — есть некоторые функции независимых переменных x и y. Примеры построения подобных карт можно найти по ссылке Contour plots.

2 Введение в метод FDTD

7. Используя пример `1DbareBones`, постройте график зависимости сигнала на узле сетки `Ez[50]` в зависимости от дискретизированного времени `q`. Разберитесь со всеми этапами подготовки изображения и объясните ход полученной кривой.

8. Увеличьте время моделирования предыдущей программы до `maxTime=1000` и объясните характер получившегося графика. Для этого потребуется анализ изменения состояний узлов сетки `Hy[SIZE-1]`, `Ez[SIZE-1]`, `Hy[SIZE-2]`, `Ez[SIZE-2]`, `Hy[SIZE-3]`, а также `Ez[0]`, `Hy[0]`, `Ez[1]`, `Hy[1]` и `Ez[2]` с течением времени.

9. Перепишите программу задачи №7 так, чтобы источник на узле `Ez[0]` генерировал синусоидальный сигнал.

$$I(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi_0).$$

Подберите параметры сигнала A, f и φ_0 так, чтобы моделирование происходило “успешно”, т. е. наблюдаемая зависимость `Ez[50](q)` полностью соответствовала данным параметрам. Определите амплитуду, период, частоту и фазу сигнала по графику `Ez[50](q)` и сравните их с заданными. Объясните, какие ограничения на параметры A, f и φ_0 имеется у метода FDTD. Рассмотрите следующие значения частоты сигнала: $f \in \{10^{-2}, 10^{-1}, 1, 1.5, 2, \pi\}$.

10. Выберете частоту синусоидального сигнала равной $f = 10^{-2}$ и увеличьте время моделирования предыдущей программы до `maxTime=1000`, а также до `maxTime=2000`. Объясните вид получившихся графиков.

11. Используя пример `1Dsnapshots`, сделайте анимацию распространения сигнала гауссовой формы. Для создания анимированного файла в формате `gif` из отдельных файлов формата `png` примените утилиту `convert` из набора `ImageMagick`. Разберитесь с назначением опций `delay` и `loop` программы `convert`. Выясните причину "недостаточной плавности" полученной анимации и устраните её.

12. Используя наработки из предыдущей задачи анимируйте распространение синусоидального сигнала в резонаторе в течение достаточно большого времени. Объясните полученный результат.

13. Используя пример `1DaddSources`, сделайте анимацию распространения в резонаторе сигнала гауссовой формы, сгенерированного точечным источником, расположенным на узле сетки `Ez[50]`.

14. Переработайте программу предыдущей задачи смоделировав систему из двух (и трёх) ненаправленных точечных аннтен расположенных в узлах сетки `Ez[50]`, `Ez[100]` (и `Ez[150]`). Пусть все антенны генерируют сигналы гауссовой формы одинаковой амплитуды и полуширины. Проведите моделирование в различных режимах: пусть антенны формируют синхронные синфазные и противофазные сигналы, а также асинхронные синфазные и противофазные сигналы. Напишите текст исходной программы на Си так, чтобы не пришлось его исправлять и перекомпилировать для каждой новой симуляции.

15. Используя пример `1DaddSources`, сделайте псевдотрёхмерную иллюстрацию (waterfall plot) поведения в резонаторе сигнала гауссовой формы, сгенерированного точечным источником, расположенным на узле сетки `Ez[50]`.

16. Отталкиваясь от решения предыдущей задачи, смоделируйте работу синусоидального источника сигнала.

17. Опираясь на пример `1Dabc` изучите простейшую реализацию поглощающих граничных условий в одномерном случае.

18. Смоделируйте поведение сигнала гауссовой формы, задавая циклические граничные условия, т. е. считайте что пространственная цепочка «свёрнута в кольцо».

19. Используя пример `1Dtfsf` изучите формализм полного поля/рассеянного поля (TFSF — Total Field/Scaterred Filed). Что необходимо изменить в исходном тексте программы для того, чтобы волна, создаваемая источником распространялась влево?

20. С помощью примера `1Ddielectric` разберитесь с особенностями, возникающими при падении сигнала на границу раздела вакуум/диэлектрик. Определите амплитудные коэффициенты отражения и прохождения, а также скорости распространения сигнала в вакууме и диэлектрике. Обратите внимание на дисперсию сигнала в диэлектрике.

21. Опираясь на пример `1Dlossy` познакомьтесь с основами моделирования проводящих сред.

22. Детально проанализируйте пример `1Dmatched`. Какую роль в данной задаче выполняет слой проводника, начинающийся с узла сетки с номером `180`. Почему сигнал не отражается от этого слоя обратно в диэлектрик?

23. Пользуясь наработками всех предыдущих задач рассмотрите следующую проблему. Пусть сигнал гауссовой формы создается антенной, находящейся в воздухе, и рапространяется в направлении системы, состоящей из N диэлектрических слоёв произвольной толщины $\{d_i\}_{i=1}^{N}$ и относительной диэлектрической проницаемости $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N}$. За многослойной структурой располагается полубесконечное воздушное пространство в котором находится приёмная антенна. Постройте анимацию распространения сигнала в данной системе, а также график зависимости от времени сигнала на прёмной антенне. Определите коэффициенты отражения R и прохождения T данной слоистой системы. Как изменятся результаты моделирования, если за приёмной антенной будет располагаться идеально отражающее зеркало?

24. Постановка задачи аналогична предыдущей проблеме. Принципиальное отличие в том, что сигнал из водуха попадает не в систему из N диэлектрических слоёв, а в случайно-неоднородную среду с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x) = \mathtt{random}\,(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$.

25. Пусть электромагнитное поле гауссовой формы падает из воздуха на композитную среду конечной толщины d. Композитная среда представляет собой диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью ε_d в который случайным образом внедрена примесь металла с относительной диэлектрической проницаемостью ε_g, проводимостью σ_g и концентрацией $0 \leqslant n \leqslant 1$. Концентрацию определять в долях толщины, занимаемой металлом в диэлектрической матрице. Например, если $d = 100$ и $n = 0.33$, то 33 из 100 узлов сетки должны иметь параметры ε_g, σ_g и 77 узлов сетки — параметры ε_d. Распределение параметров между узлами композита — случайное. В остальном условия моделирования аналогичны задаче №24.

26. Исследуйте распространение сигнала гауссовой формы в нелинейной среде с диэлектрической проницаемостью, зависящей от величины поля $\varepsilon = \varepsilon(E_z)$. Схема моделирования, в основном, аналогична задачам №23, №24 и №25. Принципиальное отличие в том, что вместо постоянных коэффициентов `ceze[m]`, `cezh[m]`, `chye[m]`, `chyh[m]` следует использовать соответствующие функции вида:

```
double cezh(int m, double ez) {
  if (m >= START && m <= STOP)
    return imp0/epsilon(ez);
  else
    return imp0;
}
```

Здесь `START` и `STOP` — это номера узлов сетки, соответствующие началу и концу нелинейной среды, а функция `epsilon(ez)` определяет её нелинейные свойства.

Так как вызываемая функция `cezh(m, ez[m])` используется при обновлении электромагнитного поля на следующем временном шаге моделирования, автоматически учитывается запаздывание поляризации среды.

Рассмотрите следующие примеры функций $\varepsilon(E_z)$:

(a) $\varepsilon(E_z) = \bar{\varepsilon} + \delta E_z$;

(b) $\varepsilon(E_z) = \bar{\varepsilon} + \delta |E_z|$;

(c) $\varepsilon(E_z) = \bar{\varepsilon} + \delta E_z^2$.

27. Смоделируйте распространение в воздухе амплитудно-модулированного сигнала, определяемого следующим образом:

$$I_{\mathrm{AM}}(t) = I_c(t)\left[1 + m\frac{I_m(t)}{|I_m(t)|_{\max}}\right].$$

Здесь $I_c(t)$ — несущий (модулируемый) сигнал, $I_m(t)$ — информационный (модулирующий) сигнал, а величина $m > 0$ — параметр модуляции.

Ограничьтесь гармоническим несущим сигналом:

$$I_c(t) = A\sin(2\pi f_c + \varphi_c),$$

но рассмотрите три типа информационных сигналов: гармонические, гауссовы и случайные.

Моделирование проведите в двух режимах:

- неискажённая модуляция $m \leqslant 1$,
- избыточная модуляция $m > 1$.