

Численные методы решения волновых уравнений

П.А. Макаров



СЫКТЫВКАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПИТИРИМА СОРОКИНА

ОПОРНЫЙ ВУЗ РЕГИОНА

2019–2020 учебный год,
осенний семестр

- 1 Введение
- 2 Основы электродинамики
- 3 Введение в метод FDTD

Определение

Волновое уравнение — линейное однородное уравнение в частных производных гиперболического типа:

$$\square \Psi = 0. \quad (1)$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Определение

Волновое уравнение — линейное однородное уравнение в частных производных гиперболического типа:

$$\square \Psi = 0. \quad (1)$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

$$\Delta = \nabla \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}. \quad (3)$$

Определение

Волновое уравнение — линейное однородное уравнение в частных производных гиперболического типа:

$$\square \Psi = 0. \quad (1)$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

$$\Delta = \nabla \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}. \quad (3)$$

Общее решение в одномерном случае

$$\Psi = f_1(x + ct) + f_2(x - ct). \quad (4)$$

Уравнение второго порядка общего вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, \dots, x_n, \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}) = 0, \quad (5)$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \Omega \in \mathbb{R}^n.$$

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j, \quad (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega. \quad (6)$$

- Эллиптического типа,
- Гиперболического типа,
- Ультрагиперболического типа,
- Параболического типа.

“Кинематическое” волновое уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

“Кинематическое” волновое уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

Телеграфные уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - GU. \quad (8)$$

“Кинематическое” волновое уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

Телеграфные уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - GU. \quad (8)$$

Простейшие обобщения “динамического” уравнения (1)

- Неоднородные среды: $c = c(\mathbf{r})$,
- Параметрические среды: $c = c(t)$,
- Квазилинейные среды: $c = c(\Psi)$
- Диспергирующие среды: $c = c(\omega)$.

- Группа Пуанкаре \mathcal{P} ;
 - Преобразования Лоренца (бусты),
 - Пространственные повороты,
 - Инверсия пространства и обращение времени,
 - Сдвиги начала координат и времени.

- Группа Пуанкаре \mathcal{P} ;
 - Преобразования Лоренца (бусты),
 - Пространственные повороты,
 - Инверсия пространства и обращение времени,
 - Сдвиги начала координат и времени.
- Конформная группа пространства-времени $\mathcal{C}(1, 3)$;

- Группа Пуанкаре \mathcal{P} ;
 - Преобразования Лоренца (бусты),
 - Пространственные повороты,
 - Инверсия пространства и обращение времени,
 - Сдвиги начала координат и времени.
- Конформная группа пространства-времени $\mathcal{C}(1, 3)$;
- Другие инвариантные преобразования

$$\begin{cases} x' = f_1(\xi) + f_2(\eta), \\ ct' = f_1(\xi) - f_2(\eta), \end{cases} \quad (9)$$

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

- Группа Пуанкаре \mathcal{P} ;
 - Преобразования Лоренца (бусты),
 - Пространственные повороты,
 - Инверсия пространства и обращение времени,
 - Сдвиги начала координат и времени.
- Конформная группа пространства-времени $\mathcal{C}(1, 3)$;
- Другие инвариантные преобразования

$$\begin{cases} x' = f_1(\xi) + f_2(\eta), \\ ct' = f_1(\xi) - f_2(\eta), \end{cases} \quad (9)$$

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

Характеристики — это кривые $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (10)$$

Разделение переменных

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})v(t).$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad (11)$$

$$v_{tt} + \omega^2 v = 0. \quad (12)$$

Разделение переменных в декартовых координатах

$$\varphi_{jj} + k_j^2 \varphi = 0, \quad j = x, y, z$$

$$\Psi = \exp(i\omega t \pm i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Уравнение Д'Аламбера

$$\square \Psi = f(\mathbf{r}, t). \quad (14)$$

Уравнение Д'Аламбера

$$\square \Psi = f(\mathbf{r}, t). \quad (14)$$

Задача Коши

$$\Psi(\mathbf{r}, t): \quad t > 0, \quad \Psi|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_2(\mathbf{r}).$$

Формула Д'Аламбера

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & -\frac{c}{2} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\zeta, \tau) d\zeta d\tau + \\ & + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{\varphi_1(x+ct) + \varphi_1(x-ct)}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Нелинейное уравнение Клейна-Гордона

$$\square\Psi - m^2\Psi = F(\Psi),$$

Нелинейное уравнение Гельмгольца

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = F(|\Psi|^2)\Psi,$$

Приближённые методы

- Приближение параболического уравнения;
- Метод геометрической оптики.

Численные методы

- FDTD — Finite Difference Time Domain;
- FVTD — Finite Volume Time Domain;
- FDFD — Finite Difference Frequency Domain;
- FEM — Finite Element Methods;
- Дискретные методы Галеркина;
- Спектральные методы.

- 1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики;
- 2 Владимиров В.С. Уравнения математической физики;
- 3 Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики;
- 4 Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики;
- 5 Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны;
- 6 Schneider J.B. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method;
- 7 Inan U.S., Marshall R.A. Numerical Electromagnetics. The FDTD Method.

Рабочий сервер: pm.syktsu.ru или 10.0.2.101

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Рабочий сервер: pm.syktsu.ru или 10.0.2.101

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Основные инструменты

- Текстовый редактор: [vim](#),

Рабочий сервер: pm.syktsu.ru или 10.0.2.101

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Основные инструменты

- Текстовый редактор: `vim`, (`$ vimtutor`)

Рабочий сервер: pm.syktsu.ru или 10.0.2.101

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Основные инструменты

- Текстовый редактор: `vim`, (`$ vimtutor`)
- Транслятор языка C: `gcc`,

Рабочий сервер: **pm.syktsu.ru** или **10.0.2.101**

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Основные инструменты

- Текстовый редактор: **vim**, (\$ vimtutor)
- Транслятор языка C: **gcc**,
- Система сборки: **make**,

Рабочий сервер: **pm.syktsu.ru** или **10.0.2.101**

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Основные инструменты

- Текстовый редактор: **vim**, (\$ vimtutor)
- Транслятор языка C: **gcc**,
- Система сборки: **make**,
- Визуализация данных: **gnuplot**,

Рабочий сервер: **pm.syktsu.ru** или **10.0.2.101**

- Доступ возможен при помощи любого браузера по адресу: <https://pm.syktsu.ru:4200> или <https://10.0.2.101:4200>.
- Подключиться к серверу можно с помощью любого SSH-клиента по тому же доменному имени или IP-адресу. Используется стандартный SSH-порт (22).
- Работа с сервером также возможна по протоколу FTP.

Основные инструменты

- Текстовый редактор: **vim**, (\$ vimtutor)
- Транслятор языка C: **gcc**,
- Система сборки: **make**,
- Визуализация данных: **gnuplot**,
- Скрипты: **bash**.

login	password	comment
112MKo	112MKo	общий пользователь группы 112-MKo
familiaio	iofamilia	личная учётная запись
student	student	общая учётная запись

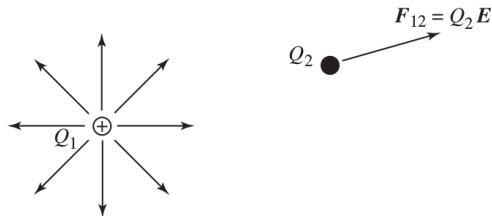


Рис. 1 : Электростатическое взаимодействие двух точечных зарядов

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad \epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (16)$$

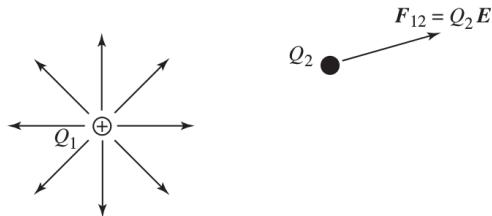


Рис. 1 : Электростатическое взаимодействие двух точечных зарядов

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad \epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (16)$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r. \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{12} = Q_2 \mathbf{E}_1. \quad (18)$$

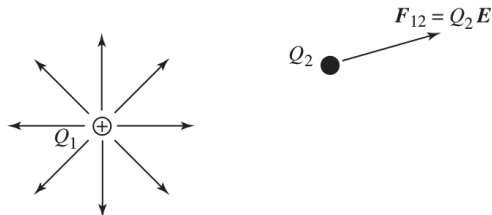


Рис. 1 : Электростатическое взаимодействие двух точечных зарядов

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad \epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (16)$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r. \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{12} = Q_2 \mathbf{E}_1. \quad (18)$$

$$[\mathbf{r}] = 1 \text{ м}, \quad [Q] = 1 \text{ Кл}, \quad [\epsilon_r] = 1, \quad [\mathbf{F}] = 1 \text{ Н}, \quad [\mathbf{E}] = 1 \text{ В/м.}$$

Определение

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad [\mathbf{D}] = 1 \text{ Кл/м}^2. \quad (19)$$

Теорема Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q. \quad (20)$$

Определение

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad [\mathbf{D}] = 1 \text{ Кл/м}^2. \quad (19)$$

Теорема Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q. \quad (20)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = Q_1. \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \quad (23)$$

$$[\rho_v] = 1 \text{ Кл/м}^3.$$

Оператор Гамильтона

$$\nabla \equiv \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}. \quad (24)$$

Градиент в декартовых координатах

$$\nabla f \equiv \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (25)$$

Оператор Гамильтона

$$\nabla \equiv \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}. \quad (24)$$

Градиент в декартовых координатах

$$\nabla f \equiv \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (25)$$

$$\nabla f \cdot \mathbf{e}_x dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx. \quad (26)$$

Оператор Гамильтона

$$\nabla \equiv \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}. \quad (24)$$

Градиент в декартовых координатах

$$\nabla f \equiv \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (25)$$

$$\nabla f \cdot \mathbf{e}_x dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx. \quad (26)$$

$$d\ell = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z. \quad (27)$$

$$\nabla f \cdot d\ell = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (28)$$

Дивергенция в декартовых координатах

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \equiv \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \quad (29)$$

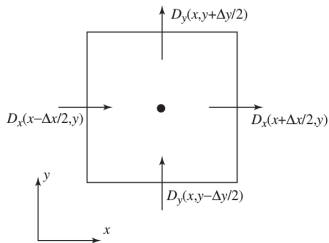


Рис. 2 : Дискретная аппроксимация дивергенции в плоскости xy

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \approx \frac{D_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y \right) - D_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y \right)}{\Delta x} + \frac{D_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2} \right) - D_y \left(x, y - \frac{\Delta y}{2} \right)}{\Delta y}. \quad (30)$$

$$\delta = \Delta x = \Delta y \rightarrow 0.$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta} \left[D_x \left(x + \frac{\delta}{2}, y \right) - D_x \left(x - \frac{\delta}{2}, y \right) + D_y \left(x, y + \frac{\delta}{2} \right) - D_y \left(x, y - \frac{\delta}{2} \right) \right]. \quad (31)$$

Вихрь в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} \equiv \text{rot } \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (32)$$

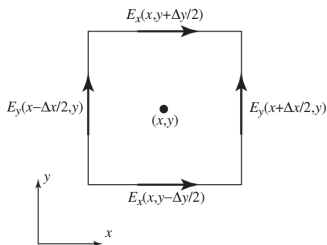


Рис. 3 : Дискретная аппроксимация вихря в плоскости xy

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \approx & \frac{E_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y\right) - E_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y\right)}{\Delta x} - \\ & - \frac{E_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}\right) - E_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}.\end{aligned}\quad (33)$$

$$\delta = \Delta x = \Delta y \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \approx & \frac{1}{\delta} \left[E_y\left(x + \frac{\delta}{2}, y\right) - E_y\left(x - \frac{\delta}{2}, y\right) - \right. \\ & \left. - E_x\left(x, y + \frac{\delta}{2}\right) + E_x\left(x, y - \frac{\delta}{2}\right) \right].\end{aligned}\quad (34)$$

$$\text{Т. к. } \nabla \times \nabla f = 0, \quad \forall f, \text{ то (22) : } \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (35)$$

$$\varphi_b - \varphi_a = \int_a^b \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (36)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} = -\nabla\varphi. \quad (37)$$

$$\text{div (37), } \varepsilon \neq \varepsilon(\mathbf{r}) : \quad \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} \stackrel{(23)}{=} \frac{\rho_v}{\varepsilon} = -\nabla \cdot \nabla\varphi. \quad (38)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}. \quad (39)$$

$$\Delta = \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (40)$$

Теорема Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv. \quad (41)$$

$$Q = \int_V \rho_v dv. \quad (42)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_V \rho_v dv. \quad (43)$$

Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (44)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (45)$$

$$[\rho_s] = 1 \text{ Кл/м}^2.$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0. \quad (46)$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (47)$$

$$[\mathbf{J}] = 1 \text{ А/м}^2, \quad [\sigma] = 1 \text{ См/м}.$$

Закон сохранения заряда

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (48)$$

Идеальные проводники

Идеальный проводник — материал с бесконечной проводимостью:

$$\sigma = \infty, \quad \text{а т. к. } \mathbf{J} \neq \infty \quad \implies \quad \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \text{const.}$$

Сила Лоренца, действующая на заряд в магнитном поле

$$\mathbf{F} = Q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (49)$$

$$[\mathbf{B}] = 1 \text{ Тл.}$$

Магнитная индукция и напряжённость магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.} \quad (50)$$

$$[\mathbf{H}] = 1 \text{ А/м.}$$

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I(\rho) [d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]}{4\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3}. \quad (51)$$

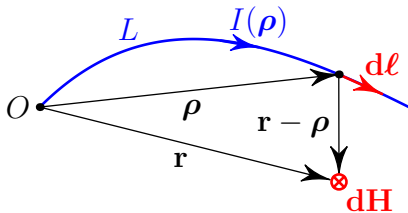


Рис. 4 : Закон Био—Савара—Лапласа

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I(\rho) [d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]}{4\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3}. \quad (51)$$

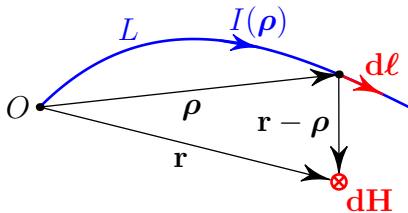


Рис. 4 : Закон Био—Савара—Лапласа

$$\mathbf{H} = \oint_L \frac{I(\rho) [d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]}{4\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3}. \quad (52)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (53)$$

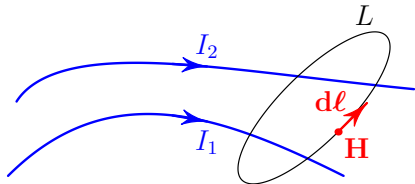


Рис. 5 : Циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (54)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (53)$$

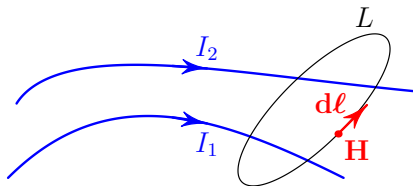


Рис. 5 : Циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (54)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (55)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (53)$$

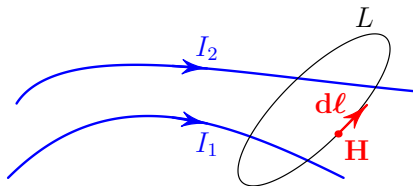


Рис. 5 : Циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (54)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (56)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad (57)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S, \quad (58)$$

$$[\mathbf{J}_S] = 1 \text{ A/м.}$$

Уравнения статики в дифференциальной форме

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (59)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \quad (61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (62)$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]). \quad (63)$$

$$\text{div (60)} : \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} \stackrel{(48)}{=} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\text{div (60)} : \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} \stackrel{(48)}{=} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0 \quad ???$$

$$\operatorname{div}(60) : \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} \stackrel{(48)}{=} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0 \quad ???$$

Закон Ампера—Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \stackrel{(48)}{=} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} \stackrel{(61)}{=} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (65)$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (66)$$

ЭДС — Электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (67)$$

$$-\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (68)$$

$$-\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \quad (69)$$

Закон Фарадея

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (70)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (71)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \quad (73)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (74)$$

$$\text{rot (71)} : \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (75)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (76)$$

$$\rho_v = 0 \quad \implies \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (77)$$

$$(77), (76) \implies (75) : \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (78)$$

$$\mathbf{J} = 0 \implies (72) : \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (79)$$

$$(79) \rightarrow (78) : \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (80)$$

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (81)$$

Введение в метод FDTD

Приближённое вычисление производных

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (82)$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (83)$$

Введение в метод FDTD

Приближённое вычисление производных

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (82)$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (83)$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (84)$$

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f'''(x_0) + \dots \quad (85)$$

Введение в метод FDTD

Приближённое вычисление производных

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (82)$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (83)$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (84)$$

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f'''(x_0) + \dots \quad (85)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2). \quad (86)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}. \quad (87)$$

- 1 Замена производных в законах Ампера и Фарадея конечными разностями. Дискретизация пространства и времени так, чтобы электрические и магнитные поля чередовались в шахматном порядке как в пространстве, так и во времени.
- 2 Преобразование разностных уравнений для получения «Уравнений обновления» (Update Equations), которые позволяют вычислить неизвестные поля в будущем через известные значения полей для прошлых моментов времени.
- 3 Вычисление магнитных полей на следующем шаге по времени.
- 4 Расчёт электрических полей на следующем шаге по времени.
- 5 Повтор предыдущих двух шагов требуемое количество раз.

Пусть \mathbf{E} и \mathbf{H} есть функции только координаты x и $\mathbf{E} \parallel Oz$.

$$-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (88)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (89)$$

Метод прыжка (leap-frog method)

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (90)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (91)$$

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m], \quad (92)$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m], \quad (93)$$

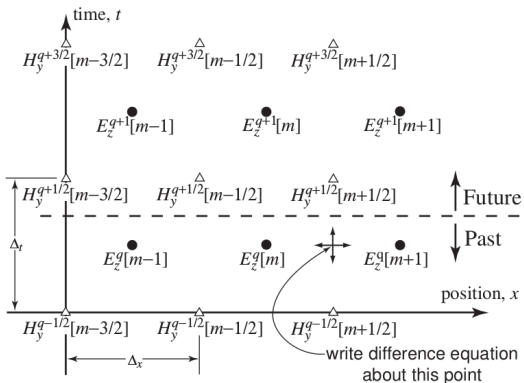


Рис. 6 : К выводу Update Equation для магнитного поля

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t}. \quad (94)$$

$$\mu \frac{H_y^{q+\frac{1}{2}}[m+\frac{1}{2}] - H_y^{q-\frac{1}{2}}[m+\frac{1}{2}]}{\Delta t} = \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta x}. \quad (95)$$

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]). \quad (96)$$

Введение в метод FDTD

Пространство-время после обновления магнитного поля

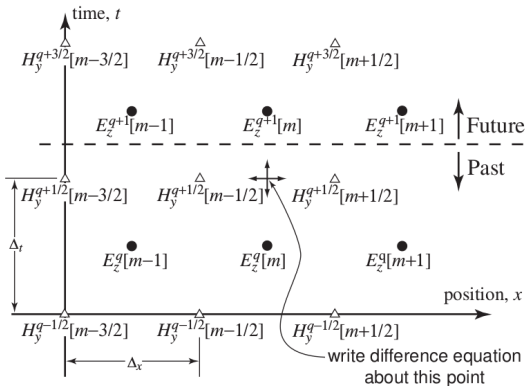


Рис. 7 : К выводу Update Equation для электрического поля

Введение в метод FDTD

Получение Update Equation для электрического поля на основе закона Ампера

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{m\Delta x, (q+1/2)\Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_{m\Delta x, (q+1/2)\Delta t}. \quad (97)$$

$$\varepsilon \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta t} = \frac{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right]}{\Delta x}. \quad (98)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right). \quad (99)$$

Число Куранта

$$S_c = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (100)$$

Характеристический импеданс вакуума

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \text{ Ом}. \quad (101)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\epsilon_r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} S_c = \frac{\eta_0}{\epsilon_r} S_c, \quad (102)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \dots = \frac{1}{\mu_r \eta_0} S_c. \quad (103)$$

Введение в метод FDTD

Пространственное смещение между магнитными и электрическими полями

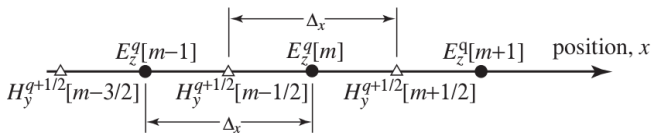


Рис. 8 : Одномерное FDTD-пространство

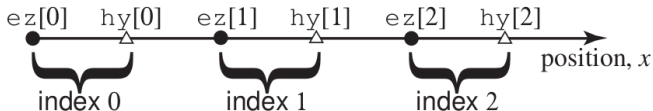


Рис. 9 : Программная реализация

$$S_c = 1$$

```
1 double ez[SIZE], hy[SIZE], imp0 = 377.0;  
2  
3 hy[m] = hy[m] + (ez[m+1] - ez[m]) / imp0;  
4 ez[m] = ez[m] + (hy[m] - hy[m-1]) * imp0;
```

Листинг 1 : Реализация Update Equations

Замечания

- 1 Узлы на концах пространственной сетки не имеют соседей с одной стороны. В частности, нет узла $hy[-1]$, который можно было бы использовать для обновления узла $ez[0]$;
- 2 $\eta = \eta_0 = \text{const}$;
- 3 Если поля изначально равны нулю, они останутся равными нулю всегда.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3 #define SIZE 200
4
5 int main() {
6     double ez[SIZE] = {0.}, hy[SIZE] = {0.}, imp0 = 377.0;
7     int qTime, maxTime = 250, m;
8
9     for (qTime = 0; qTime < maxTime; qTime++) {
10        for (m = 0; m < SIZE-1; m++)
11            hy[m] = hy[m] + (ez[m+1] - ez[m]) / imp0;
12        for (m = 1; m < SIZE; m++)
13            ez[m] = ez[m] + (hy[m] - hy[m-1]) * imp0;
14        ez[0] = exp(-(qTime - 30.) * (qTime - 30.) / 100.);
15        printf("%3d\t%g\n", qTime, ez[50]);
16    }
17
18    return 0;
19 }
```

Листинг 2 : 1DbareBones.c

Введение в метод FDTD

Компиляция и запуск программы

```
$ gcc 1DbareBones.c -o 1DbareBones -lm
```


Введение в метод FDTD

Компиляция и запуск программы

```
$ gcc 1DbareBones.c -o 1DbareBones -lm
```

```
$ ./1DbareBones
```

```
:
```

```
240 9.38891e-34
```

```
241 9.38891e-34
```

```
242 9.38891e-34
```

```
243 9.38891e-34
```

```
244 9.38891e-34
```

```
245 9.38891e-34
```

```
246 9.38891e-34
```

```
247 9.38891e-34
```

```
248 9.38891e-34
```

```
249 9.38891e-34
```

Введение в метод FDTD

Компиляция и запуск программы

```
$ gcc 1DbareBones.c -o 1DbareBones -lm
```

```
$ ./1DbareBones
```

```
:
```

```
240 9.38891e-34
```

```
241 9.38891e-34
```

```
242 9.38891e-34
```

```
243 9.38891e-34
```

```
244 9.38891e-34
```

```
245 9.38891e-34
```

```
246 9.38891e-34
```

```
247 9.38891e-34
```

```
248 9.38891e-34
```

```
249 9.38891e-34
```

```
$ ./1DbareBones > 1DbareBones.dat
```

```
1 reset
2 set terminal epslatex color colortext
3 set output './image.tex'
4 set origin 0.0,0.0
5 set size 1.0,1.0
6 set samples 1000
7 set style line 1 linetype 1 lw 5.0 linecolor rgb "blue"
8 set nokey
9 set notitle
10 set xlabel "Time step"
11 set ylabel "\\texttt{Ez [50]} (V/m)"
12 set format y "$%.1f$"
13 set yrange [*:*]
14 set xrange [*:*]
15 set xtics 25
16 set grid
17 set ytics 0.2
18
19 plot "1DbareBones.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

Листинг 3 : 1DbareBones.plt

Введение в метод FDTD

Подготовка рисунка: L^AT_EX-шаблон

```
1 \documentclass[varwidth=true, border=10pt, convert={size=640
   x}]{standalone}
2 \usepackage{graphics}
3 \usepackage{nopageno}
4 \usepackage{mathrsfs, mathenv, mathtext}
5 \usepackage{amsmath, amsthm, amssymb}
6 \usepackage{gensymb}
7 \usepackage{tikz}
8     \usetikzlibrary{calc, decorations.markings, decorations.
   pathreplacing}
9     \tikzset{>=latex}
10 \newcommand{\V}{\mathbf{V}}
11
12 \begin{document}
13
14 \begin{figure}
15     \input{image.tex}
16 \end{figure}
17
18 \end{document}
```

Листинг 4 : 1DbareBones.tex

```
1 gnuplot 1DbareBones.plt && latexmk -pdf 1DbareBones.tex
2 rm *.aux
3 rm *.eps
4 rm *.log
5 rm *.fls
6 rm *.fdb_latexmk
7 rm image.tex
8 rm image-eps-converted-to.pdf
```

Листинг 5 : makefig.sh

```
$ chmod +x makefig.sh
$ ./makefig.sh
```

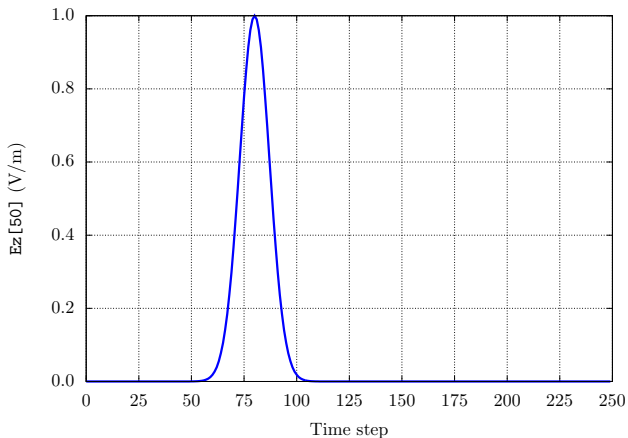


Рис. 10 : Распространение сигнала гауссовой формы в свободном пространстве

Введение в метод FDTD

Результаты моделирования за более продолжительный промежуток времени

`maxTime = 1000?`

maxTime = 1000?

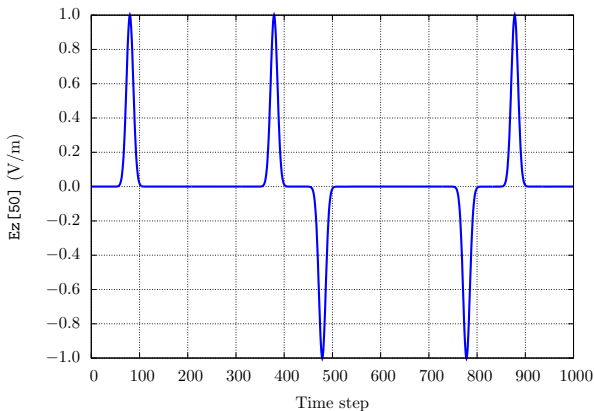


Рис. 11 : Распространение сигнала гауссовой формы в резонаторе


```
1 char basename[80] = "sim", filename[100];
2 int frame = 0;
3 FILE *snapshot;
```

Листинг 6 : Определение переменных для работы со “снимками” поля

```
1 if (qTime % 10 == 0) {
2     sprintf(filename, "%s.%d", basename, frame++);
3     snapshot = fopen(filename, "w");
4     for (m = 0; m < SIZE; m++)
5         fprintf(snapshot, "%3d\t%g\n", m, ez[m]);
6     fclose(snapshot);
7 }
```

Листинг 7 : Фрагмент кода, создающий “снимки” поля на каждый десятый шаг моделирования

Рис. 12 : “Снимки” поля, полученные через каждые 10 временных интервалов

```
1 t = 0
2 end_time = 24
3 system('mkdir -p animation')
4 load 'loop.plt'
```

Листинг 8 : 1Dsnapshots.plt

```
1 set terminal pngcairo
2 set style line 1 linetype 1 lw 3.0 linecolor rgb "blue"
3 set nokey
4 set notitle
5 set xlabel "Spatial step"
6 set ylabel "Ez (V/m)"
7 set format y "%.1f"
8 set yrange [0:1]
9 set xrange [0:200]
10 set xtics 25
11 set grid
12 set ytics 0.2
13 outfile = sprintf('animation/%d.png', t)
14 set output outfile
15 plot 'sim.'.t using 1:2 with lines linestyle 1
16 t = t + 1
17 if(t<end_time) reread;
```

Листинг 9 : loop.plt

```
$ gnuplot 1Dsnapshots.plt
```

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (104)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{J}. \quad (105)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (104)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{J}. \quad (105)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_z^{q+\frac{1}{2}}[m]. \quad (106)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (104)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{J}. \quad (105)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_z^{q+\frac{1}{2}}[m]. \quad (106)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m - \frac{1}{2} \right] \right), \quad (107)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] - \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_z^{q+\frac{1}{2}}[m]. \quad (108)$$

Введение в метод FDTD

Алгоритм, учитывающий дополнительные источники тока

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3 #define SIZE 200
4
5 int main() {
6     char basename[80] = "sim", filename[100];
7     int frame = 0;
8     FILE *snapshot;
9     double ez[SIZE] = {0.}, hy[SIZE] = {0.}, imp0 = 377.0;
10    int qTime, maxTime = 500, m;
11
12    for (qTime = 0; qTime < maxTime; qTime++) {
13        for (m = 0; m < SIZE - 1; m++)
14            hy[m] = hy[m] + (ez[m+1] - ez[m]) / imp0;
15        for (m = 1; m < SIZE; m++)
16            ez[m] = ez[m] + (hy[m] - hy[m-1]) * imp0;
17        ez[50] += exp(-(qTime - 30.) * (qTime - 30.) / 100.);
18        if (qTime % 10 == 0) {
19            sprintf(filename, "%s.%d", basename, frame++);
20            snapshot = fopen(filename, "w");
21            for (m = 0; m < SIZE; m++)
22                fprintf(snapshot, "%3d\t%g\n", m, ez[m]);
23            fclose(snapshot);
24        }
25    }
26
27    return 0;
28 }
```

Листинг 10 : 1DaddSources.c

Введение в метод FDTD

Гауссов сигнал в резонаторе, созданный точечным источником

Рис. 13 : Анимация распространения сигнала, созданного
дополнительным источником тока

Введение в метод FDTD

Псевдо-3D графики (waterfall plots)

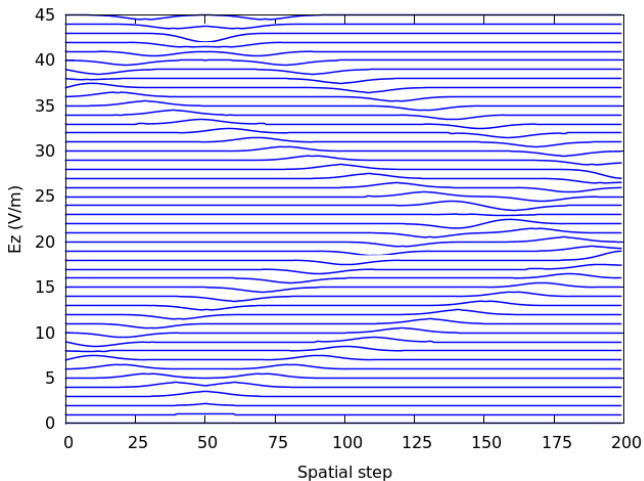


Рис. 14 : Распространение сигнала, созданного дополнительным источником тока, в резонаторе

```
1 set terminal pngcairo
2 set output '1DaddSources.png'
3
4 set nokey
5 set notitle
6 set xlabel "Spatial step"
7 set ylabel "Ez (V/m)"
8 set format y "%.0f"
9 set yrange [0:45]
10 set xrange [0:200]
11 set xtics 25
12 set ytics 5
13
14 set style line 1 lc rgb '#ffffff' lt 1 lw 1.5
15 set style fill solid 1.0 border rgb 'blue'
16
17 filename(t) = sprintf("sim.%d", t)
18
19 plot for [t=45:0:-1] filename(t) using 1:($2+t) with filledcurves ls 1
```

Листинг 11 : 1DaddSources.plt

```
$ gnuplot 1DaddSources.plt
```

$$S_c = 1 \iff c\Delta t = \Delta x. \quad (109)$$

```
1 ez[0] = ez[1];  
2 hy[SIZE-1] = hy[SIZE-2];
```

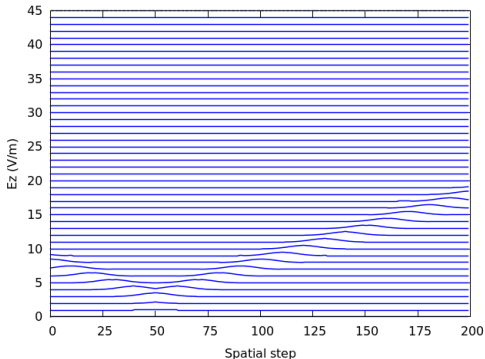


Рис. 15 : Распространение сигнала в свободном пространстве

Ненаправленный точечный источник

$$f(t) = f(q\Delta t) = e^{-\left(\frac{q\Delta t - 30\Delta t}{100\Delta t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q-30}{100}\right)^2} = f[q]. \quad (110)$$

Направленный источник, формирующий первичную волну

$$t - \frac{x}{c} = q\Delta t - \frac{m\Delta x}{c} = \left(q - \frac{m\Delta x}{c\Delta t}\right) \Delta t = (q - m) \Delta t. \quad (111)$$

Ненаправленный точечный источник

$$f(t) = f(q\Delta t) = e^{-\left(\frac{q\Delta t - 30\Delta t}{100\Delta t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q-30}{100}\right)^2} = f[q]. \quad (110)$$

Направленный источник, формирующий первичную волну

$$t - \frac{x}{c} = q\Delta t - \frac{m\Delta x}{c} = \left(q - \frac{m\Delta x}{c\Delta t}\right) \Delta t = (q - m)\Delta t. \quad (111)$$

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta t - 30\Delta t}{100\Delta t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{100}\right)^2}. \quad (112)$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{\eta} e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{100}\right)^2}. \quad (113)$$

Введение в метод FDTD

Формализм полного и рассеянного поля (TFSF — Total-Field/Scattered-Field)

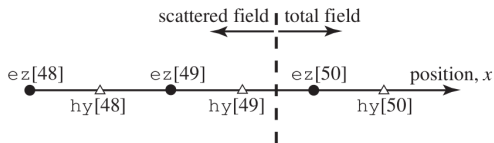


Рис. 16 : Окрестности границы полного поля/рассеянного поля

$$\underbrace{E_z^{q+1}[50]}_{\text{tot}} = \underbrace{E_z^q[50]}_{\text{tot}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(\underbrace{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 + \frac{1}{2} \right]}_{\text{tot}} - \underbrace{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right]}_{\text{scat}} \right). \quad (114)$$

$$\underbrace{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right]}_{\text{scat}} = \underbrace{H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right]}_{\text{scat}} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left(\underbrace{E_z^q[50]}_{\text{tot}} - \underbrace{E_z^q[49]}_{\text{scat}} \right). \quad (115)$$

Введение в метод FDTD

Решение проблемы полного электрического поля на границе TFSF

$$\underbrace{E_z^{q+1}[50]}_{\text{tot}} = \underbrace{E_z^q[50]}_{\text{tot}} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left(\underbrace{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 + \frac{1}{2} \right]}_{\text{tot}} - \underbrace{\left\{ \overbrace{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right]}^{\text{scat}} + \overbrace{\left(-\frac{1}{\eta} E_z^{\text{inc}} \left[50 - \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right] \right)}^{\text{inc}} \right\}}_{\text{tot}} \right). \quad (116)$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^q[50] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] \right), \quad (117)$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \cdot \frac{1}{\eta} E_z^{\text{inc}} \left[50 - \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right]. \quad (118)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \implies \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{\eta_0 S_c}{\varepsilon_r} \cdot \frac{1}{\eta_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} = \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}. \quad (119)$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} E_z^{\text{inc}} \left[50 - \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right]. \quad (120)$$

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (E_z^q[50] - E_z^q[49]). \quad (121)$$

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] - \frac{S_c}{\eta_0} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} E_z^{\text{inc}}[50, q]. \quad (122)$$

$$x = 0 \iff E_z[50]. \quad (123)$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} E_z^{\text{inc}} \left[-\frac{1}{2}, q + \frac{1}{2} \right], \quad (124)$$

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] = H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[50 - \frac{1}{2} \right] - \frac{S_c}{\eta_0} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} E_z^{\text{inc}} [0, q]. \quad (125)$$

Введение в метод FDTD

Моделирование границы полного и рассеянного поля между узлами hy [49] и ez [50]

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3 #define SIZE 200
4
5 int main() {
6     double ez[SIZE] = {0.}, hy[SIZE] = {0.}, imp0 = 377.0;
7     int qTime, maxTime = 500, m, frame = 0;
8     char basename[80]="sim", filename[100];
9     FILE *snapshot;
10    for (qTime = 0; qTime < maxTime; qTime++) {
11        hy[SIZE-1] = hy[SIZE-2];
12        for (m = 0; m < SIZE - 1; m++)
13            hy[m] = hy[m] + (ez[m+1] - ez[m]) / imp0;
14        hy[49] -= exp(-(qTime - 30.)) * (qTime - 30.) / 100.) / imp0;
15        ez[0] = ez[1];
16        for (m = 1; m < SIZE; m++)
17            ez[m] = ez[m] + (hy[m] - hy[m-1]) * imp0;
18        ez[50] += exp(-(qTime+0.5 - (-0.5)-30)*(qTime+0.5 - (-0.5)-30)/100);
19        if (qTime % 10 == 0) {
20            sprintf(filename, "%s.%d", basename, frame++);
21            snapshot = fopen(filename, "w");
22            for (m = 0; m < SIZE; m++)
23                fprintf(snapshot, "%d\t\tg\n", m, ez[m]);
24            fclose(snapshot);
25        }
26    }
27    return 0;
28 }
```

Листинг 12 : 1Dtfsf.c

Введение в метод FDTD

Распространение волны от направленного источника

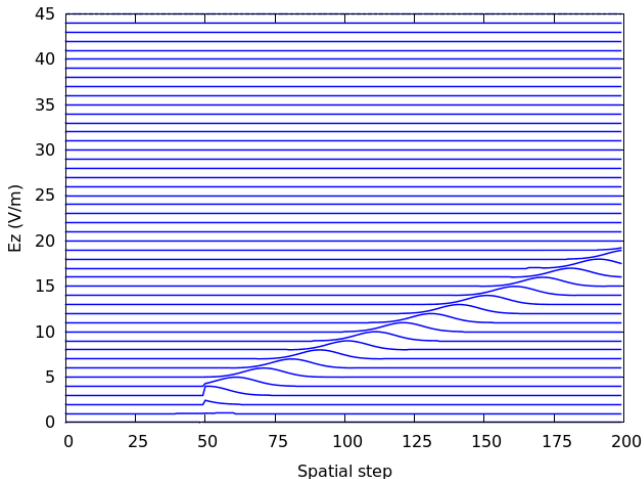


Рис. 17 : Распространение в свободном пространстве волны от направленного источника, расположенного на границе TFSF

Введение в метод FDTD

Моделирование неоднородных материалов

```
1 ez [m] = ez [m] + (hy [m] - hy [m-1]) * imp0 / epsR [m];  
2 hy [m] = hy [m] + (ez [m+1] - ez [m]) / imp0 / muR [m];
```

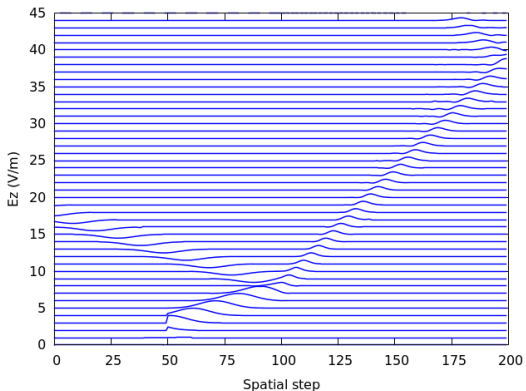


Рис. 18 : Падение волны на диэлектрик с $\epsilon_r = 9$, начинающийся с узла с номером 100

- Появление отраженной и прошедшей волн;
- Разные скорости распространения волны в разных средах;
- Некорректная работа поглощающих граничных условий;
- Появление дисперсии волны;
- Уточнение границ раздела сред.

Отражение и прохождение при нормальном падении волны

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad (126)$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (127)$$

Отражение и прохождение при нормальном падении волны

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad (126)$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (127)$$

$$R = \frac{\eta_0/3 - \eta_0}{\eta_0/3 + \eta_0} = -\frac{1}{2}, \quad (128)$$

$$T = \frac{2\eta_0/3}{\eta_0/3 + \eta_0} = \frac{1}{2}. \quad (129)$$

Введение в метод FDTD

Отражение и прохождение на границе диэлектриков

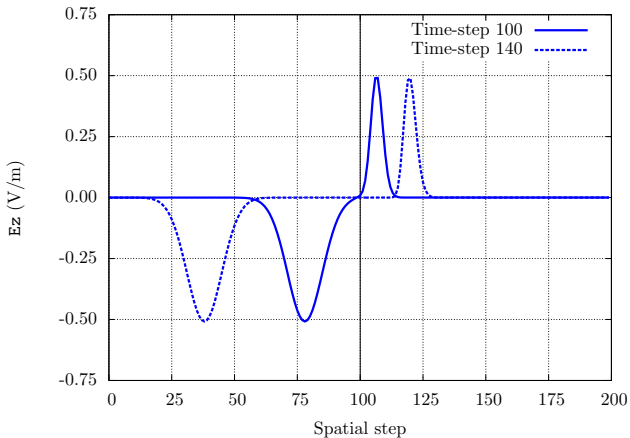


Рис. 19 : Два снимка поля в неоднородной среде

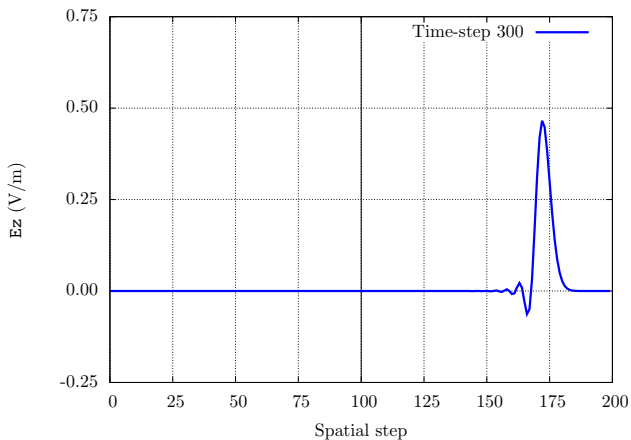


Рис. 20 : Дисперсия волны в средах с $\epsilon \neq 1$ и/или $\mu \neq 1$

Введение в метод FDTD

Определение точной границы раздела сред

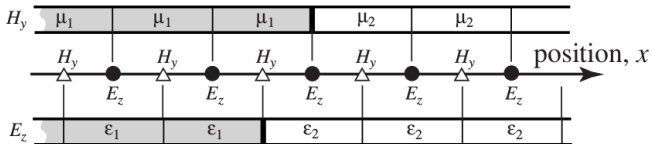


Рис. 21 : Проблема

Введение в метод FDTD

Определение точной границы раздела сред

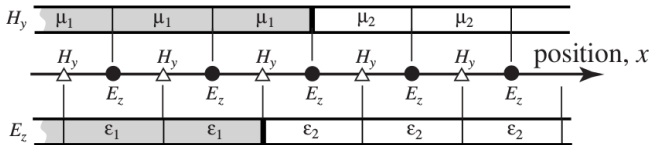


Рис. 21 : Проблема

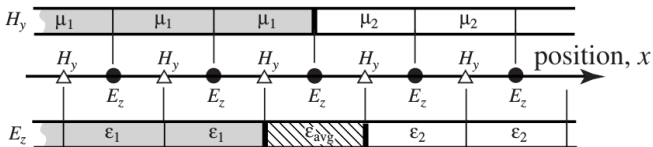


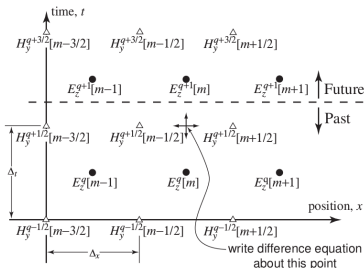
Рис. 22 : Решение

Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (130)$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (131)$$

$$\left(m\Delta x, \left(q + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)$$



$$E_z^{q+\frac{1}{2}}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}. \quad (132)$$

$$\sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} + \varepsilon \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta t} = \frac{H_y^{q+\frac{1}{2}}[m + \frac{1}{2}] - H_y^{q+\frac{1}{2}}[m - \frac{1}{2}]}{\Delta x}. \quad (133)$$

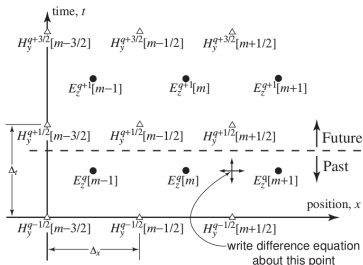
$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} E_z^q[m] + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \left(H_y^{q+\frac{1}{2}}[m + \frac{1}{2}] - H_y^{q+\frac{1}{2}}[m - \frac{1}{2}] \right). \quad (134)$$

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}. \quad (135)$$

$$\sigma_m H_y + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (136)$$

$$\left(\left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta x, q \Delta t \right)$$



$$H_y^q \left[m + \frac{1}{2} \right] \approx \frac{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right]}{2}. \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m \frac{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right]}{2} + \mu \frac{H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] - H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right]}{\Delta t} &= \\ &= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (138)$$

$$H_y^{q+\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu}} H_y^{q-\frac{1}{2}} \left[m + \frac{1}{2} \right] + \frac{\frac{\Delta t}{\mu \Delta x}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu}} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m]). \quad (139)$$

$$\varepsilon_r = 9, \quad \mu_r = 1.$$

$$\text{LOSS} = \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon} = 0.01,$$

$$\text{ceze} = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} = \frac{1 - \text{LOSS}}{1 + \text{LOSS}},$$

$$\text{cezh} = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r} S_c \cdot \frac{1}{1 + \text{LOSS}}.$$

```
1 #define SIZE 200
2 #define LOSS 0.01
3 int main() {
4     ...
5     for (m = 0; m < SIZE; m++)
6         if (m < 100) { /* free space */
7             ceze[m] = 1.0;
8             cezh[m] = imp0;
9         }
10        else { /* lossy dielectric */
11            ceze[m] = (1.0 - LOSS) / (1.0 + LOSS);
12            cezh[m] = imp0 / 9.0 / (1.0 + LOSS);
13        }
14
15    for (qTime = 0; qTime < maxTime; qTime++) {
16        for (m = 0; m < SIZE-1; m++)
17            hy[m] = hy[m] + (ez[m + 1] - ez[m]) / imp0;
18
19        hy[49] -= exp(-(qTime - 30.) * (qTime - 30.) / 100.) / imp0;
20
21        ez[0] = ez[1];
22        for (m = 1; m < SIZE-1; m++)
23            ez[m] = ceze[m] * ez[m] + cezh[m] * (hy[m] - hy[m-1]);
24
25        ez[50] += exp(-(qTime+0.5 - (-0.5) - 30)*(qTime+0.5 - (-0.5) - 30)/100);
26
27        ...
28    }
29    return 0;
30 }
```

Введение в метод FDTD

Моделирование диэлектрика с затуханием

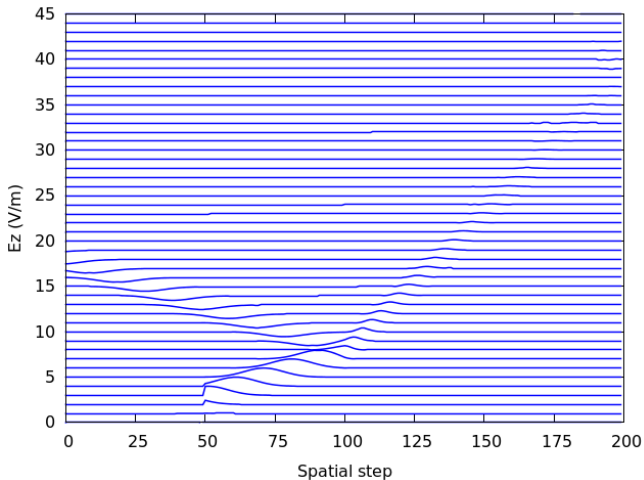


Рис. 23 : Падение волны на границу раздела вакуум/диэлектрик с затуханием

Введение в метод FDTD

Характеристический импеданс среды с затуханием

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\mu\omega}\right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\mu\omega}\right)}{\varepsilon_r \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}}. \quad (140)$$

$$\eta \Big|_{\frac{\sigma_m}{\mu} = \frac{\sigma}{\varepsilon}} = \eta \Big|_{\sigma_m = \sigma = 0} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}. \quad (141)$$

$$\varepsilon_r = 9, \quad \mu_r = 1.$$

$$\text{LOSS} = \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon} = \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu} = 0.02,$$

$$\text{ceze} = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} = \frac{1 - \text{LOSS}}{1 + \text{LOSS}},$$

$$\text{cezh} = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\varepsilon_r} S_c \cdot \frac{1}{1 + \text{LOSS}}.$$

$$\text{chyh} = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu}} = \frac{1 - \text{LOSS}}{1 + \text{LOSS}},$$

$$\text{chye} = \frac{\frac{\Delta t}{\mu \Delta x}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta t}{2\mu}} = \frac{S_c}{\mu_r \eta_0} \cdot \frac{1}{1 + \text{LOSS}}.$$

Введение в метод FDTD

Моделирование согласованной нагрузки

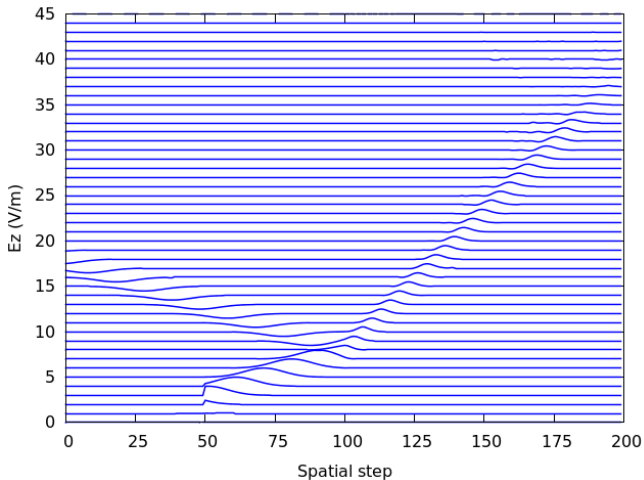


Рис. 24 : Трёхслойная система: вакуум/диэлектрик/проводник.
Импедансы диэлектрика и проводника совпадают