Динамика системы со связями

Макаров П. А.

6 іюня 2021 г.

1 Постановка задачи

Система представляет собой $N = 3$ точечных электрических заряда, скреплённых тремя недеформируемыми невесомыми стержнями[1]. В момент времени $t = 0$ стержень, противоположный заряду q_1, ломается ровно посередине.

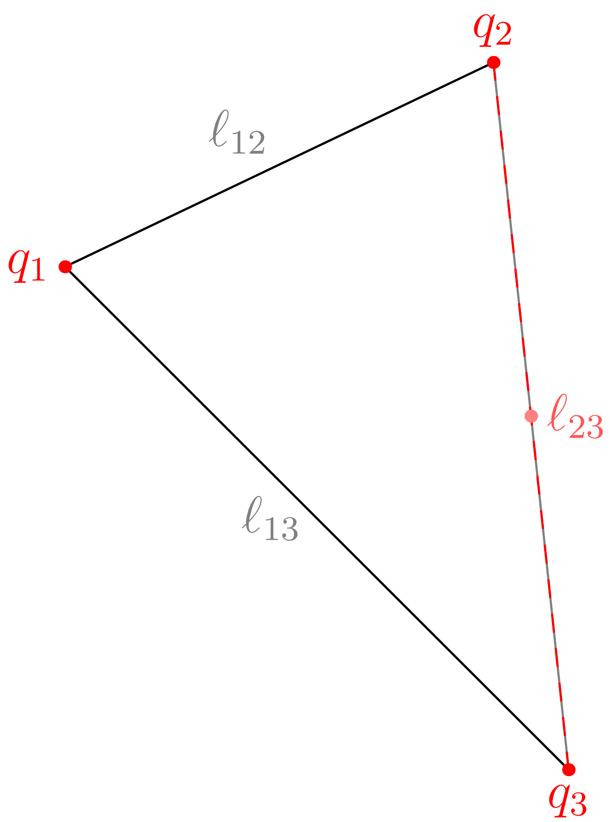

Рис. 1: Геометрия задачи для случая $\ell_{12} : \ell_{13} : \ell_{23} = 2 : 3 : 3$

Определите характер движения системы и максимальную скорость заряда q_1 в пренебрежении всеми процессами, связанными с излучением электромагнитных волн[2].

[1]Интересно рассмотреть задачи с массивными стержнями, а также с нерастяжимыми невесомыми нитями.

[2]Также представляет интерес исследование системы с учётом этих процессов.

2 Общие уравнения

На систему наложены голономные связи со стороны двух стержней

$$f_1 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - \ell_{12} = 0, \tag{1}$$

$$f_2 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| - \ell_{13} = 0. \tag{2}$$

Уравнение движения i-й материальной точки системы, записанное в форме уравнения Лагранжа I рода имеет вид

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{K} \mathbf{R}_i^{(j)}, \tag{3}$$

где равнодействующая активных сил Кулона

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j\neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad \mathbf{f}_{ij} = kq_iq_j\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \tag{4}$$

а силы реакции связей

$$\mathbf{R}_i^{(j)} = \lambda_j \nabla_i f_j. \tag{5}$$

Силы (4) и (5) — центральные, поэтому справедлив закон сохранения момента импульса системы

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i\right] = \mathbf{const}. \tag{6}$$

В силу (6) движение системы всегда происходит в одной плоскости[3], в качестве которой удобно выбрать плоскость $z = 0$, а значит:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0. \tag{7}$$

Уравнения (7) можно рассматривать как три дополнительных по отношению к (2) уравнения связей. Таким образом, общее число голономных связей в задаче $K = 5$, а количество степеней свободы равно

$$s = 3N - K = 3 \cdot 3 - 5 = 4. \tag{8}$$

Положение центра масс C системы описывается радиус-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum\limits_{i}^{N} m_i\mathbf{r}_i}{\sum\limits_{i}^{N} m_i}. \tag{9}$$

Так как рассматриваемая система изолированная, то центр масс движется равномерно и прямолинейно, либо покоится $\mathbf{v}_C = \mathbf{const}$. Будем решать задачу в системе отсчёта, связанной с центром масс C:

$$\mathbf{r}_C = 0. \tag{10}$$

[3]Было бы интересно решить задачу $N > 3$ с неплоским расположением зарядов

3 Динамика системы

Динамическая система уравнений согласно (3)–(5), а также (1), (2) и (7) имеет вид

$$m_1\ddot{x}_1 = kq_1\left(q_2\frac{x_1-x_2}{\ell_{12}^3}+q_3\frac{x_1-x_3}{\ell_{13}^3}\right)+2\lambda_1(x_1-x_2)+2\lambda_2(x_1-x_3), \tag{11}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = kq_1\left(q_2\frac{y_1-y_2}{\ell_{12}^3}+q_3\frac{y_1-y_3}{\ell_{13}^3}\right)+2\lambda_1(y_1-y_2)+2\lambda_2(y_1-y_3), \tag{12}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = kq_2\left(q_1\frac{x_2-x_1}{\ell_{12}^3}+q_3\frac{x_2-x_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}\right)-2\lambda_1(x_1-x_2), \tag{13}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = kq_2\left(q_1\frac{y_2-y_1}{\ell_{12}^3}+q_3\frac{y_2-y_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}\right)-2\lambda_1(y_1-y_2), \tag{14}$$

$$m_3\ddot{x}_3 = kq_3\left(q_1\frac{x_3-x_1}{\ell_{13}^3}+q_2\frac{x_3-x_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}\right)-2\lambda_2(x_1-x_3), \tag{15}$$

$$m_3\ddot{y}_3 = kq_3\left(q_1\frac{y_3-y_1}{\ell_{13}^3}+q_2\frac{y_3-y_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}\right)-2\lambda_2(y_1-y_3), \tag{16}$$

В силу (8) очевидно, что приведённая система избыточна, поскольку содержит шесть неизвестных функций $\{x_i(t), y_i(t)\}_1^N$. Вместе с тем, уравнения (11)–(16) удобно использовать для численного моделирования динамики системы, однако для этого необходимо знать явный вид множителей Лагранжа λ_j. Для их определения продифференцируем уравнения связей (1)–(2):

$$\ddot{f}_1/2 = (\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2+(x_1-x_2)(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+(y_1-y_2)(\ddot{y}_1-\ddot{y}_2)=0, \tag{17}$$

$$\ddot{f}_2/2 = (\dot{x}_1-\dot{x}_3)^2+(x_1-x_3)(\ddot{x}_1-\ddot{x}_3)+(\dot{y}_1-\dot{y}_3)^2+(y_1-y_3)(\ddot{y}_1-\ddot{y}_3)=0. \tag{18}$$

Подставляя $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{y}_2$, $\ddot{x}_3$ и $\ddot{y}_3$ из (11)–(16) в (17)–(18), получаем систему уравнений для определения λ_1 и λ_2

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_2)\Bigg(\frac{kq_1q_2}{m_1}\frac{x_1-x_2}{\ell_{12}^3}+\frac{kq_1q_3}{m_1}\frac{x_1-x_3}{\ell_{13}^3}+\frac{2\lambda_1}{m_1}(x_1-x_2)+\frac{2\lambda_2}{m_1}(x_1-x_3)-\\
&-\frac{kq_2q_1}{m_2}\frac{x_2-x_1}{\ell_{12}^3}-\frac{kq_2q_3}{m_2}\frac{x_2-x_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}+\frac{2\lambda_1}{m_2}(x_1-x_2)\Bigg)+\\
&+(y_1-y_2)\Bigg(\frac{kq_1q_2}{m_1}\frac{y_1-y_2}{\ell_{12}^3}+\frac{kq_1q_3}{m_1}\frac{y_1-y_3}{\ell_{13}^3}+\frac{2\lambda_1}{m_1}(y_1-y_2)+\frac{2\lambda_2}{m_1}(y_1-y_3)-\\
&-\frac{kq_2q_1}{m_2}\frac{y_2-y_1}{\ell_{12}^3}-\frac{kq_2q_3}{m_2}\frac{y_2-y_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}+\frac{2\lambda_1}{m_2}(y_1-y_2)\Bigg)+(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2=0,
\end{aligned}$$

$$
(x_1-x_3)\left(\frac{kq_1q_2}{m_1}\frac{x_1-x_2}{\ell_{12}^3}+\frac{kq_1q_3}{m_1}\frac{x_1-x_3}{\ell_{13}^3}+\frac{2\lambda_1}{m_1}(x_1-x_2)+\frac{2\lambda_2}{m_1}(x_1-x_3)-\right.
$$
$$
\left.-\frac{kq_3q_1}{m_3}\frac{x_3-x_1}{\ell_{13}^3}-\frac{kq_3q_2}{m_3}\frac{x_3-x_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}+\frac{2\lambda_2}{m_3}(x_1-x_3)\right)+
$$
$$
+(y_1-y_3)\left(\frac{kq_1q_2}{m_1}\frac{y_1-y_2}{\ell_{12}^3}+\frac{kq_1q_3}{m_1}\frac{y_1-y_3}{\ell_{13}^3}+\frac{2\lambda_1}{m_1}(y_1-y_2)+\frac{2\lambda_2}{m_1}(y_1-y_3)-\right.
$$
$$
\left.-\frac{kq_3q_1}{m_3}\frac{y_3-y_1}{\ell_{13}^3}-\frac{kq_3q_2}{m_3}\frac{y_3-y_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}+\frac{2\lambda_2}{m_3}(y_1-y_3)\right)+(\dot{x}_1-\dot{x}_3)^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_3)^2=0.
$$

Очевидно, что приведённые выше равенства — это система двух линейных уравнений относительно λ_1 и λ_2, которую можно записать в матричной форме:

$$
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{19}
$$

где элементы матрицы коэффициентов при неизвестных равны

$$
A_{11}=2\ell_{12}^2\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}, \tag{20}
$$

$$
A_{12}=A_{21}=2\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)}{m_1}, \tag{21}
$$

$$
A_{22}=2\ell_{13}^2\frac{m_1+m_3}{m_1m_3}, \tag{22}
$$

а свободные члены есть

$$
\begin{aligned}
B_1=&\frac{kq_2q_3}{m_2}\cdot\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_3)+(y_1-y_2)(y_2-y_3)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}-\frac{kq_1q_2}{\ell_{12}}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}-\\
&-\frac{kq_1q_3}{m_1\ell_{13}^3}\left[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)\right]-\\
&-(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2-(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2,
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2=&\frac{kq_3q_2}{m_3}\cdot(\frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)+(y_1-y_3)(y_3-y_2)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}-\frac{kq_3q_1}{\ell_{13}}\frac{m_1+m_3}{m_1m_3}-\\
&-\frac{kq_1q_2}{m_1\ell_{12}^3}\left[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)\right]-\\
&-(\dot{x}_1-\dot{x}_3)^2-(\dot{y}_1-\dot{y}_3)^2.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Решая систему (19) методом Крамера, окончательно получаем множители Лагранжа

$$
\lambda_1=\frac{B_1A_{22}-B_2A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}},\quad \lambda_2=\frac{B_2A_{11}-B_1A_{21}}{A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}}, \tag{25}
$$

которые согласно (20)–(24) — есть функции координат и скоростей материальных точек системы.

Таким образом, правые части уравнений (11)–(16) с учётом (25) — это известные функции координат и скоростей, определяющие силы $\mathbf{F}_i\left(\{\mathbf{r}_i(t)\}_1^N,\{\dot{\mathbf{r}}_i(t)\}_1^N\right)$ действующие на материальные точки системы в текущий момент времени.

4 Численное моделирование

Теперь можно численно решить систему (11)–(16) согласно следующему алгоритму.

1. Выбираются параметры задачи $\{m_i\}_1^N$, $\{q_i\}_1^N$, ℓ_{ij} и временной шаг моделирования Δt.

2. Задаются начальные условия $\{\mathbf{r}_i(0)\}_1^N, \{\dot{\mathbf{r}}_i(0)\}_1^N$.

3. С помощью (11)–(16) и (25) определяются компоненты ускорений всех материальных точек системы в текущий момент времени

$$\begin{aligned} a_{ix}(t) &= \frac{F_{ix}(t)}{m_i}, \\ a_{iy}(t) &= \frac{F_{iy}(t)}{m_i}. \end{aligned} \tag{26}$$

4. С помощью (26) вычисляются компоненты скоростей всех материальных точек системы в следующий момент времени

$$\begin{aligned} v_{ix}(t+\Delta t) &= v_{ix}(t) + a_{ix}(t)\Delta t, \\ v_{iy}(t+\Delta t) &= v_{iy}(t) + a_{iy}(t)\Delta t. \end{aligned} \tag{27}$$

5. С помощью (27) и (26) вычисляются координаты всех материальных точек системы в следующий момент времени

$$\begin{aligned} x_i(t+\Delta t) &= x_i(t) + v_{ix}(t)\Delta t + \frac{a_{ix}(t)\,(\Delta t)^2}{2}, \\ y_i(t+\Delta t) &= y_i(t) + v_{iy}(t)\Delta t + \frac{a_{iy}(t)\,(\Delta t)^2}{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

6. Шаги 3–5 повторяются требуемое число раз.

5 Начальные данные

Уточним теперь шаг 2 из алгоритма, приведённого в предыдущем пункте. Согласно постановке задачи начальные скорости всех материальных точек в системе центра масс равны нулю $\dot{\mathbf{r}}_i(0) = 0$. Осталось определить шесть начальных координат, из которых согласно (8) и (10) произвольными являются всего две координаты, а все остальные выражаются через них согласно уравнениям

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} = 0, \tag{29}$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1+m_2+m_3} = 0, \tag{30}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell_{12}^2 = 0, \tag{31}$$
$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 - \ell_{13}^2 = 0. \tag{32}$$

В начальный момент времени по условию задачи дополнительно известно, что

$$(x_2(0) - x_3(0))^2 + (y_2(0) - y_3(0))^2 - \ell_{23}^2 = 0. \tag{33}$$

Последнее равенство позволяет свести задание начальных положений материальных точек к выбору всего одной координаты. Будем использовать систему координат показанную на рис. 2, такую что начальная ордината первого заряда в ней равна нулю

$$\boxed{y_1(0) = 0.} \tag{34}$$

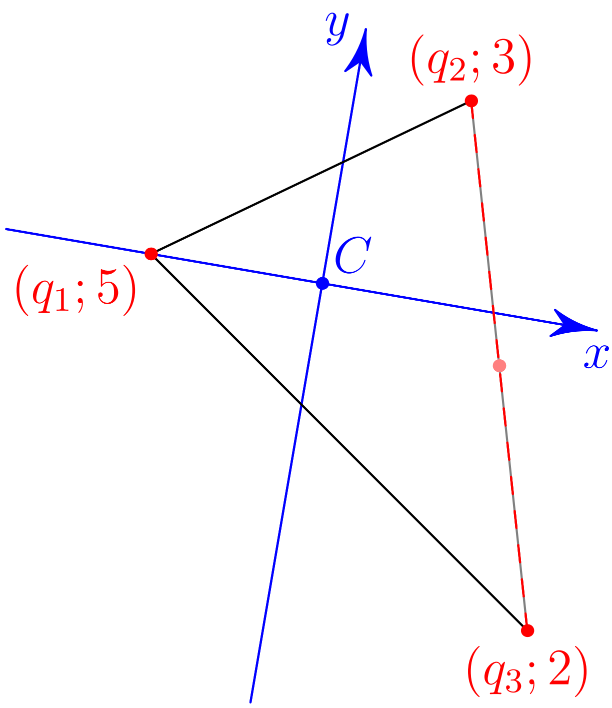

Рис. 2: Система координат и выбор начальных условий для случая $m_1 : m_2 : m_3 = 5 : 3 : 2$. Остальные параметры выбраны теми же, что и на рис. 1

Наш выбор согласно (30) позволяет сразу заключить, что в начальный момент времени

$$\boxed{y_3(0) = -\frac{m_2}{m_3} y_2(0).} \tag{35}$$

Для определения остальных начальных координат имеем систему:

$$\begin{aligned}
&m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0) + m_3 x_3(0) = 0, \\
&x_1(0) = x_2(0) - \sqrt{\ell_{12}^2 - y_2^2(0)}, \\
&x_1(0) = x_3(0) - \sqrt{\ell_{13}^2 - \frac{m_2^2}{m_3^2} y_2^2(0)}, \\
&x_2(0) = x_3(0) - \sqrt{\ell_{23}^2 - \frac{(m_2 + m_3)^2}{m_3^2} y_2^2(0)}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Из этой системы получаем уравнение для определения $y_2(0)$

$$\sqrt{\ell_{13}^2 - \frac{m_2^2}{m_3^2} y_2^2(0)} - \sqrt{\ell_{12}^2 - y_2^2(0)} = \sqrt{\ell_{23}^2 - \frac{(m_2+m_3)^2}{m_3^2} y_2^2(0)}. \tag{37}$$

Данное уравнение путём довольно громоздких преобразований[4] сводится к квадратному уравнению, решение которого есть

$$\boxed{y_2(0) = \frac{m_3}{2} \sqrt{\frac{\ell_{23}^4 + 2\ell_{12}^2\ell_{13}^2 - \left(\ell_{13}^2 - \ell_{23}^2\right)^2 - \left(\ell_{12}^2 - \ell_{23}^2\right)^2}{(m_2+m_3)\left(m_2\ell_{12}^2 + m_3\ell_{13}^2\right) - m_2 m_3 \ell_{23}^2}}} \tag{38}$$

Коль скоро найдено $y_2(0)$, несложно отыскать и $x_1(0)$

$$m_1 x_1(0) + m_2\left(x_1(0) + \sqrt{\ell_{12}^2 - y_2^2(0)}\right) + m_3\left(x_1(0) + \sqrt{\ell_{13}^2 - \frac{m_2^2}{m_3^2} y_2^2(0)}\right) = 0. \tag{39}$$

$$\boxed{x_1(0) = -\frac{m_2\sqrt{\ell_{12}^2 - y_2^2(0)} + \sqrt{m_3^2\ell_{13}^2 - m_2^2 y_2^2(0)}}{m_1+m_2+m_3}.} \tag{40}$$

Теперь несложно определить $x_2(0)$ и $x_3(0)$

$$\boxed{x_2(0) = \frac{(m_1+m_3)\sqrt{\ell_{12}^2 - y_2^2(0)} - \sqrt{m_3^2\ell_{13}^2 - m_2^2 y_2^2(0)}}{m_1+m_2+m_3}.} \tag{41}$$

$$\boxed{x_3(0) = \sqrt{\ell_{13}^2 - \frac{m_2^2}{m_3^2} y_2^2(0)} - \frac{m_2\sqrt{\ell_{12}^2 - y_2^2(0)} + \sqrt{m_3^2\ell_{13}^2 - m_2^2 y_2^2(0)}}{m_1+m_2+m_3}.} \tag{42}$$

6 Результаты моделирования

6.1 Равносторонний треугольник одинаковых зарядов

Полагаем $q_1 = q_2 = q_3 = q$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $\ell_{12} = \ell_{13} = \ell_{23} = \ell$. Тогда имеем

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -y_3(0) = \frac{\ell}{2}, \quad x_1(0) = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\ell, \quad x_2(0) = x_3(0) = \ldots$$

Анимация для этого случая приведена на втором слайде.

6.2 Произвольная система зарядов

Пусть $q_1 : q_2 : q_3 = 1 : 3 : 1$, $m_1 : m_2 : m_3 = 5 : 3 : 2$, $\ell_{12} : \ell_{13} : \ell_{23} = 2 : 3 : 3$.

Анимация для этого случая приведена на третьем слайде.

[4] Данную работу удобно проводить с помощью Maxima.

Приложение

К выводу (19)–(24)

$$
\begin{aligned}
&2\lambda_1 \ell_{12}^2 \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + 2\lambda_2 \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)}{m_1} + \\
&+\frac{kq_1q_2}{\ell_{12}}\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} + \frac{kq_1q_3}{m_1\ell_{13}^3}\left[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)\right] - \\
&-\frac{kq_2q_3}{m_2}\left(\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3} + \frac{(y_1-y_2)(y_2-y_3)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}\right) + \\
&+(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2 = 0,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\lambda_1 \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)}{m_1} + 2\lambda_2 \ell_{13}^2 \frac{m_1+m_3}{m_1 m_3} + \\
&+\frac{kq_3q_1}{\ell_{13}}\frac{m_1+m_3}{m_1m_3} + \frac{kq_1q_2}{m_1\ell_{12}^3}\left[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)\right] - \\
&-\frac{kq_3q_2}{m_3}\left(\frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3} + \frac{(y_1-y_3)(y_3-y_2)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}\right) + \\
&+(\dot{x}_1-\dot{x}_3)^2 + (\dot{y}_1-\dot{y}_3)^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{44}
$$